

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
- FACULTAD REGIONAL ROSARIO -

REGIMEN TRANSITORIO EN CIRCUITOS LINEALES

Versión 1.1 (marzo 2010)

Fernando Bianchi
Electrotecnia II

Contenido general

Parte 1. Método Clásico

Parte 2. Método Operacional

Anexo A. Curvas de funciones típicas

Anexo B. Tablas de Transformadas de Laplace

Contenido de la Parte 1

Nota preliminar	5
Versiones	5
1. Introducción	7
1.1 Circuito eléctrico	7
1.2 Conmutación	8
1.3 Régimen eléctrico	9
1.4 Métodos de cálculo	9
2. Ecuaciones fundamentales	10
2.1 Relaciones Tensión-Corriente	10
2.2 Energías	12
3. Conexiones entre elementos del mismo tipo	14
3.1 Conexiones serie	15
3.2 Conexiones paralelo	16
4. Fuentes - Funciones excitación	17
4.1 Funciones básicas	17
4.2 Funciones compuestas	18
4.3 Funciones singulares	20
4.4 Funciones basadas en funciones básicas	22
5. Comportamiento ante conmutaciones	23
5.1 Resistores	23
5.2 Inductor y capacitor	23
5.3 Leyes de la conmutación	24
5.4 Circuitos equivalentes en $t = 0^+$	25
5.5 Situaciones ideales	26
6. Ecuaciones generales de los circuitos	27
6.1 Circuitos R-L y R-C	27
6.2 Circuito R-L-C	31

7. Régimen Permanente	38
7.1 Excitación exponencial.....	39
7.2 Excitación continua	40
7.3 Excitación alterna.....	41
8. Circuitos y excitaciones específicas	44
8.1 Circuitos R-L y R-C con excitación continua.....	44
8.2 Circuitos R-L y R-C con excitación alterna.	47
8.3 Circuito R-L-C con excitación continua.....	50
8.4 Circuito R-L-C con excitación alterna	57
9. Recursos adicionales.	59
9.1 Excitación con la derivada o la integral	59
9.2 Superposición	61
10. Circuitos mallados	61
ANEXO A - Gráficas de funciones típicas	63
1. Exponenciales.....	63
2. Armónicas o senoidales	64

Nota preliminar

Estimados Alumnos, les agradeceré que me hagan llegar sus consultas, opiniones, sugerencias y los errores que hayan encontrado a la siguiente dirección de correo electrónico: fbianchi@cammesa.com.ar

Versiones

Nº	Fecha	Modificaciones
1.0	Abril 2005	Versión inicial
1.1	Marzo 2010	Correcciones aportadas por Nicolás Di Ruscio. Cambio en sección 9. <i>Las correcciones no invalidan la versión 1.0</i>

PARTE I

MÉTODO CLÁSICO

1. Introducción

Esta introducción tiene por fin establecer algunos conceptos y términos básicos que se utilizarán a lo largo del Capítulo.

1.1 Circuito eléctrico

Un circuito eléctrico es un conjunto de elementos conectados de determinada manera, por los cuales puede circular corriente eléctrica.

Topología o configuración de un circuito

Es la forma en que están conectados entre si los elementos del circuito. Los elementos que están conectados de manera que los recorre la misma corriente constituyen lo que se denomina **rama**; los puntos en que se unen más de dos

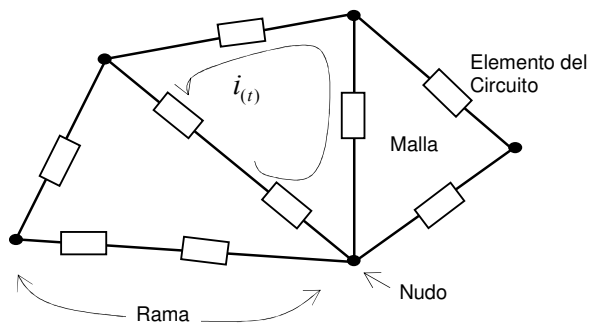


FIG.1.1 CIRCUITO ELÉCTRICO

ramas se llaman **nudos** y todo recorrido cerrado que se pueda realizar a través de los elementos de un circuito se llama **malla**.

Elementos básicos de un circuito

Son los elementos más sencillos, que no se pueden representar mediante la combinación de otros elementos. Se distinguen dos tipos, según tengan o no capacidad de generar energía eléctrica: activos y pasivos. Los elementos activos son las fuentes de tensión o de corriente, y los elementos pasivos son los resistores, inductores y capacitores.

En la realidad no existen elementos que sigan exactamente el comportamiento de alguno de estos elementos básicos bajo cualquier condición de funcionamiento. Por ejemplo un resistor real podrá comportarse realmente como un resistor puro si trabaja a bajas frecuencias, pero en altas frecuencias manifestará también características de inductor y de capacitor. Por lo tanto, en ese caso deberá representarse mediante la combinación de los tres elementos pasivos básicos.

Parámetros de un circuito

Los parámetros son las magnitudes que caracterizan los elementos de un circuito. Los parámetros de resistores inductores y capacitores se llaman resistencia (R), inductancia (L) y capacidad (C).

Salvo acción externa, consideraremos que los parámetros son invariables en el tiempo.

Variables de un circuito

Son las magnitudes que cambian cuando se modifica alguna fuente que excita el circuito, como las corrientes y las tensiones. En esa situación los parámetros permanecen constantes.

Modelo

El modelo de un circuito o de un componente real, es la combinación de elementos básicos que mejor representa su comportamiento eléctrico.

Si bien la calidad de un modelo depende fundamentalmente de cuán bien emula el circuito real, también es importante su simpleza, ya que modelos innecesariamente complejos dificultan los cálculos.

1.2 Conmutación

Se utiliza el término conmutación para referir cualquier modificación que se produzca en un circuito eléctrico, ya sea por alteración de alguno de sus elementos o de su topología.

Alteraciones de elementos

Pueden ser las siguientes:

Cambio de la función matemática que describe el comportamiento de una fuente.

Cambio del parámetro que caracteriza un elemento pasivo. El análisis que se realiza en este capítulo asume que entre conmutaciones, los elementos pasivos son invariantes en el tiempo.

Alteración topológica

Consiste en la modificación de la cantidad de ramas y/o de nudos del circuito, y/o de la forma en que se vinculan las ramas.

Normalmente se realizan accionando interruptores o conmutadores.

1.3 Régimen eléctrico

El régimen de un circuito eléctrico es el conjunto de corrientes de sus ramas y el conjunto de tensiones de sus nudos¹. Cualquiera de estos conjuntos determina por si solo el régimen del circuito.

Régimen permanente

Es el régimen al que tiende un circuito después de haber experimentado una conmutación.

Régimen transitorio

Es el régimen de un circuito desde el momento en que se produce una conmutación hasta que se alcanza el régimen permanente.

Régimen previo

Llamaremos así al régimen que existe antes de una conmutación.

La siguiente figura muestra la relación temporal entre estos regimenes y una conmutación producida en el circuito.

La transición entre régimen transitorio y permanente es indefinida; en teoría, según veremos, el régimen permanente se alcanza en $t = \infty$, pero en la práctica, dependiendo del circuito, puede alcanzarse en segundos o fracciones de segundos después de una conmutación.

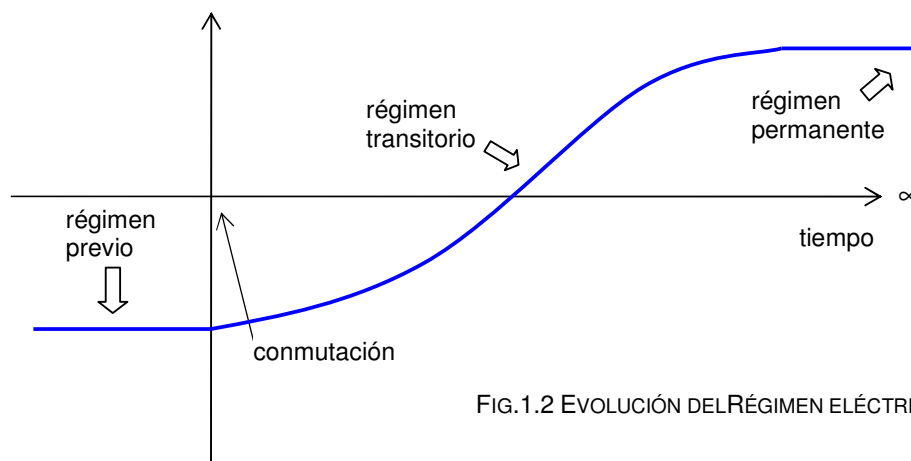


FIG.1.2 EVOLUCIÓN DEL RÉGIMEN ELÉCTRICO

1.4 Métodos de cálculo

En esta primera parte se trata el análisis del régimen transitorio utilizando el denominado Método Clásico. Este método se basa en la resolución clásica de

¹ Llamamos tensiones de nudo a sus diferencias de potencial con respecto a un nudo tomado como referencia. La tensión del nudo de referencia es cero.

las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los circuitos eléctricos. Luego se aborda el análisis mediante el llamado Método Operacional o de la Transformada de Laplace.

El estudio comienza con el Método Clásico porque es el método que surge naturalmente de aplicar las leyes básicas de la electricidad, y al emplearlo se pueden ir analizando los aspectos físicos o eléctricos. Sin embargo tiene importantes limitaciones para resolver gran parte de los problemas prácticos.

Por su parte el Método Operacional se abstrae de la parte física pero proporciona una herramienta matemática poderosa (la Transformada de Laplace) que facilita los cálculos, por lo cual es el recomendado en la mayoría de los casos.

2. Ecuaciones fundamentales

2.1 Relaciones Tensión-Corriente

El estudio del régimen transitorio que se desarrolla aquí corresponde a circuitos con elementos lineales, cuyas relaciones tensión-corriente resultantes de la experimentación son las siguientes.

Resistor

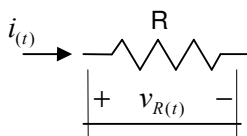


FIG.2.1 RESISTOR

$$\text{Ley de Ohm:} \quad v_{R(t)} = i_{(t)} \cdot R \quad [2.1]$$

$$\text{o bien:} \quad i_{(t)} = \frac{v_{R(t)}}{R} \quad [2.2]$$

R es el parámetro que define el comportamiento del resistor y se llama Resistencia.

Inductor

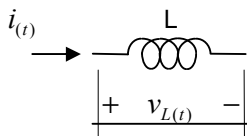


FIG.2.2 INDUCTOR

Cuando en un inductor lineal circula una corriente, se produce una caída de tensión proporcional a las variaciones de esa corriente.

$$v_{L(t)} = L \cdot \frac{di_{L(t)}}{dt} \quad [2.3]$$

El factor de proporcionalidad es la inductancia L, que es el parámetro característico del inductor.

La Ley de Faraday/Lenz establece que en un inductor aparece una fuerza contraelectromotriz proporcional a las variaciones de flujo, lo que se expresa de la siguiente manera:

$$e_{L(t)} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

El signo menos es el que le proporciona a la tensión sobre el inductor el carácter de fuerza contraelectromotriz, la cual, no es más que una fuerza electromotriz negativa, o sea una caída de tensión. Entonces podríamos escribir:

$$v_{L(t)} = \frac{d\Phi_{(t)}}{dt} \quad \text{con} \quad \Phi_{(t)} = L \cdot i_{(t)}$$

Integrando la expresión [2.3] podemos obtener la corriente en función de la tensión:

$$i_{L(t)} = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_{L(t)} dt \quad [2.4]$$

Capacitor

Cuando circula corriente a través de un capacitor se acumula una carga eléctrica

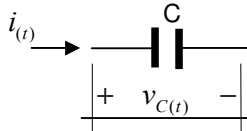


FIG.2.3 CAPACITOR

$$q_{(t)} = \int_{-\infty}^t i_{C(t)} dt \quad [2.5]$$

Se integra desde $-\infty$ para abarcar todo período en el que pudo haber alguna circulación de corriente.

La carga eléctrica produce una tensión proporcional, con un factor de proporcionalidad $1/C$, siendo C el parámetro característico del capacitor, llamado Capacidad.

$$v_{C(t)} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_{C(t)} dt \quad [2.6]$$

El hecho de que la tensión sea inversamente proporcional a la Capacidad es consistente con la idea que se pretende transmitir con el nombre de este parámetro. Frente a una determinada carga, cuanto menor sea C , mayor será la tensión que aparecerá en el capacitor y por ende estará más próximo a la ruptura de su dieléctrico. Por el contrario, un capacitor grande elevará poco su tensión pudiendo almacenar más carga antes de que se produzca esa ruptura. El valor de C se puede expresar como:

$$C = \frac{q_{(t)}}{v_{C(t)}}$$

Si se conociera el valor de la tensión del capacitor en un instante T_0 , podríamos dividir el intervalo de integración anterior de la siguiente manera:

$$v_{C(t)} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{T_0} i_{C(t)} dt + \frac{1}{C} \int_{T_0}^t i_{C(t)} dt$$

donde la primera integral es la tensión acumulada hasta el instante T_0 , y la segunda integral es la tensión que se agrega desde allí en adelante.

$$v_{C(t)} = v_{C(T_0)} + \int_{T_0}^t i_{C(t)} dt \quad [2.7]$$

De la ecuación [2.6] podemos despejar la corriente en función de la tensión:

$$i_{C(t)} = C \cdot \frac{dv_{C(t)}}{dt} \quad [2.8]$$

Convención

Para simplificar notaciones, toda vez que se refieran las variables corriente o tensión, utilizando letras minúsculas cursivas, se asumirá que son funciones del tiempo.

Por ejemplo, usaremos i , v_C , v_L , en lugar de $i_{(t)}$, $v_{C(t)}$, $v_{L(t)}$.

2.2 Energías

Los elementos básicos de los circuitos pueden dividirse en disipadores de energía o acumuladores de energía.

Los resistores son disipadores de energía. Toda la energía eléctrica que se les aplica se transforma en energía calórica. No tienen ninguna capacidad de acumulación.

Los inductores y capacitores pueden acumular energía. La energía acumulada en un momento puede entregarse en otro momento al resto del circuito. No disipan energía.

En general, la energía es la integral de la potencia.

$$\mathcal{E}_{(t)} = \int_{-\infty}^t p_{(t)} dt \quad [2.9]$$

La potencia, en el caso de un componente eléctrico está dada por:

$$p_{(t)} = v_{(t)} \cdot i_{(t)} \quad [2.10]$$

Veamos cómo interpretar esa expresión de la energía y a qué resultados nos conduce cuando se aplica a cada uno de los componentes básicos de los circuitos.

Se debe entender que una integral siempre tiene extremos de integración. Cuando los extremos no se explicitan se dice que es una integral indefinida. En ese caso, el extremo inferior de integración debe ser un tiempo tan remoto que nos asegure que no quedan valores no nulos del integrando excluidos del intervalo de integración. Sólo $t = -\infty$ puede asegurar eso para cualquier caso. Por su parte el extremo superior es t , o sea que su valor está indefinido. De ese modo, el resultado de la integral es una función de t . Al reemplazar t por un valor de tiempo, se obtendrá un valor definido: el valor de la función en ese instante de tiempo.

Energía en el Resistor

La expresión general de la energía, representa la energía disipada por el resistor desde que fue energizado hasta cualquier instante t .

$$\mathcal{E}_{R(t)} = \int_{-\infty}^t p_{R(t)} \cdot dt = R \int_{-\infty}^t i_{R(t)} \cdot v_{R(t)} \cdot dt$$

$$\text{y como } v_{R(t)} = i_{R(t)} \cdot R \Rightarrow \mathcal{E}_{R(t)} = R \int_{-\infty}^t i_{R(t)}^2 \cdot dt$$

La energía disipada hasta un instante definido, por ejemplo $t = T_1$, resulta:

$$\mathcal{E}_{R(T_1)} = R \int_{-\infty}^{T_1} i_{R(t)}^2 dt \quad [2.11]$$

Si se deseara obtener la cantidad de energía disipada en un intervalo comprendido entre $t = T_1$ y $t = T_2$, habría que restar de la energía disipada hasta T_2 la energía disipada hasta T_1 .

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{R(T_2)} - \mathcal{E}_{R(T_1)} = R \int_{-\infty}^{T_2} i_{R(t)}^2 dt - R \int_{-\infty}^{T_1} i_{R(t)}^2 dt = R \int_{T_1}^{T_2} i_{R(t)}^2 dt \quad [2.12]$$

Energía en el inductor

En este caso, la ecuación general nos da la energía acumulada en el inductor hasta un instante t , o lo que es lo mismo, la energía que tiene el inductor en ese instante.

$$\mathcal{E}_{L(t)} = \int_{-\infty}^t p_{L(t)} dt = \int_{-\infty}^t i_{L(t)} \cdot v_{L(t)} \cdot dt$$

Para tener una sola variable, reemplazamos

$$v_{L(t)} = L \cdot \frac{di_{L(t)}}{dt}$$

Así:

$$\mathcal{E}_{L(t)} = L \int_{-\infty}^t i_{L(t)} \cdot \frac{di_{L(t)}}{dt} \cdot dt = L \int_{i_{L(-\infty)}}^{i_{L(t)}} i_{L(t)} \cdot di_{L(t)}$$

Nótese que cuando la variable de integración es t , los extremos de integración son $-\infty$ y t ; cuando la variable de integración es la corriente, los extremos de integración son los valores de la corriente en $-\infty$ y t .

La primitiva de la integral es:

$$\mathcal{E}_{L(t)} = L \cdot \frac{i_{L(t)}^2}{2} \Bigg|_{i_{L(-\infty)}}^{i_{L(t)}}$$

y luego de reemplazar por los extremos, asumiendo que la corriente en $-\infty$ es nula, resulta:

$$\mathcal{E}_{L(t)} = \frac{1}{2} L \cdot i_{L(t)}^2 \quad [2.13]$$

Energía en el capacitor

En este caso, la ecuación general nos da la energía acumulada en el capacitor hasta un instante t , o lo que es lo mismo, la energía que tiene el capacitor en ese instante.

$$\mathcal{E}_{C(t)} = \int_{-\infty}^t p_{C(t)} dt = \int_{-\infty}^t i_{C(t)} \cdot v_{C(t)} \cdot dt$$

Para tener una sola variable, reemplazamos

$$i_{C(t)} = C \cdot \frac{dv_{C(t)}}{dt}$$

Así:

$$\mathcal{E}_{C(t)} = C \int_{-\infty}^t v_{C(t)} \cdot \frac{dv_{C(t)}}{dt} \cdot dt = C \int_{v_{C(-\infty)}}^{v_{C(t)}} v_{C(t)} \cdot dv_{C(t)}$$

Nótese que cuando la variable de integración es t , los extremos de integración son $-\infty$ y t ; cuando la variable de integración es la tensión, los extremos de integración son los valores de tensión en $-\infty$ y t .

La primitiva de la integral es:

$$\mathcal{E}_{C(t)} = C \cdot \frac{v_{C(t)}^2}{2} \Bigg|_{v_{C(-\infty)}}^{v_{C(t)}}$$

y luego de reemplazar por los extremos, asumiendo que la tensión en $-\infty$ es nula, resulta:

$$\mathcal{E}_{C(t)} = \frac{1}{2} C \cdot v_{C(t)}^2 \quad [2.14]$$

Comentarios

Es interesante señalar la similitud entre las ecuaciones de la energía en el inductor y en el capacitor. Se observa que ambas son proporcionales a la mitad del parámetro característico del elemento y al cuadrado de la corriente en el caso del inductor, y al cuadrado de la tensión en el caso del capacitor.

En general existe una similitud entre el comportamiento de los inductores con relación a la corriente y el de los capacitores con relación a la tensión. Esto no sólo se evidencia en las ecuaciones de energía, sino en las relaciones tensión-corriente tratadas en el punto 2.1.

También podemos encontrar similitudes con las ecuaciones de energía de otros sistemas físicos no eléctricos. Por ejemplo, recordemos la conocida ecuación de la energía de un cuerpo en movimiento:

$$\mathcal{E}_{(t)} = \frac{1}{2} m \cdot v_{(t)}^2 \quad m = \text{masa} \quad v = \text{velocidad}$$

3. Conexiones entre elementos del mismo tipo

Se trata de determinar el parámetro de un elemento equivalente a dos elementos del mismo tipo (dos resistores, dos inductores o dos capacitores) conectados entre sí.

Las conexiones podrán ser en serie o en paralelo. O sea que tendremos 6 casos.

Los resultados obtenidos para la conexión de dos elementos podrán extenderse fácilmente a cualquier cantidad de elementos.

Para determinar el parámetro del elemento equivalente en cada caso, nos basaremos en que la tensión entre los extremos de los elementos conectados y la corriente total que ingresa a los mismos, deben ser iguales a la tensión y la corriente del elemento equivalente. Utilizaremos las relaciones tensión-corriente vistas en el punto 2.

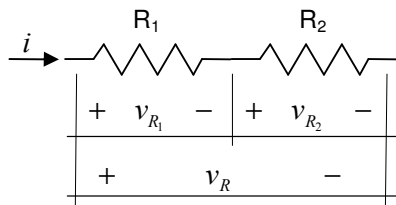
3.1 Conexiones serie

La conexión serie se caracteriza por lo siguiente:

- la corriente es común a los elementos conectados en serie e igual a la del elemento equivalente
- la tensión del elemento equivalente es la suma de las tensiones de los elementos conectados en serie

Para analizar esta conexión plantearemos la ley de Kirchhoff de tensiones.

Resistor



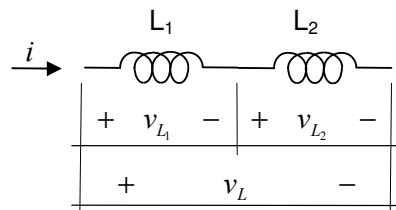
$$v_R = v_{R_1} + v_{R_2}$$

$$i \cdot R = i \cdot R_1 + i \cdot R_2$$

$$R = R_1 + R_2 \quad [3.1]$$

FIG.3.1 RESISTORES EN SERIE

Inductor



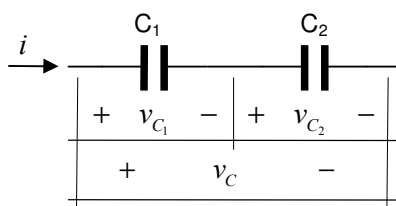
$$v_L = v_{L_1} + v_{L_2}$$

$$L \cdot \frac{di}{dt} = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt}$$

$$L = L_1 + L_2 \quad [3.2]$$

FIG.3.2 INDUCTORES EN SERIE

Capacitor



$$v_C = v_{C_1} + v_{C_2}$$

$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i \cdot dt + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i \cdot dt$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad [3.3]$$

FIG.3.3 CAPACITORES EN SERIE

Varios elementos en serie

Los planteos anteriores se pueden extender a N elementos en serie, resultando:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad [3.4]$$

Los resultados para el resistor y el inductor son predecibles: a medida que conectamos resistores en serie se incrementa la resistencia al paso de la corriente y a medida que conectamos inductores en serie es como crear un inductor de más número de vueltas, es decir de mayor inductancia.

En el caso de los capacitores, la conexión en serie lleva a una capacidad menor a la de cualquier capacitor de la serie. Esto se debe a que todos los capacitores, incluyendo al capacitor equivalente, son recorridos por la misma corriente, quedando con la misma carga. Entonces, el que queda con mayor tensión, en este caso el capacitor equivalente, es el de menor capacidad.



$$C = \frac{q}{v_C} \quad \text{Punto 2.1, ecuación 2.7}$$

FIG.3.4 CAPACITORES EN SERIE

La utilidad de conectar capacitores en serie reside en que el capacitor equivalente soporta la suma de las tensiones que soporta cada capacitor.

Problema sugerido. Supongamos que necesitamos un capacitor de $1\mu\text{F}$ que soporte 600V y tenemos varios capacitores de $0,5\mu\text{F}$, $1\mu\text{F}$ y $2\mu\text{F}$ pero de 400V de aislación. ¿Cómo podemos resolver el problema con los capacitores disponibles ?

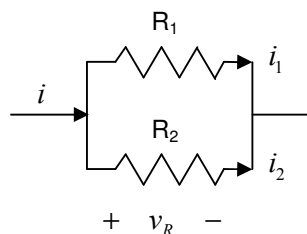
3.2 Conexiones paralelo

La conexión paralelo se caracteriza por lo siguiente:

- la tensión es común a los elementos conectados en paralelo e igual a la del elemento equivalente
- la corriente del elemento equivalente es la suma de las corrientes de los elementos conectados en paralelo

Para analizar esta conexión plantearemos la ley de Kirchoff de corrientes.

Resistor



$$i = i_1 + i_2$$

$$\frac{v_R}{R} = \frac{v_R}{R_1} + \frac{v_R}{R_2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

[3.5]

FIG.3.5 RESISTORES EN PARALELO

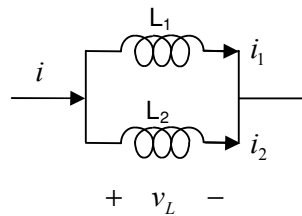
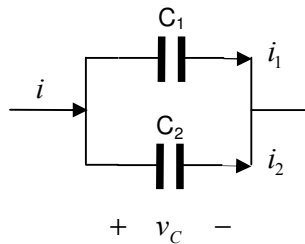
Inductor

FIG.3.6 INDUCTORES EN PARALELO

$$i = i_1 + i_2$$

$$\frac{1}{L} \int v_L \cdot dt = \frac{1}{L_1} \int v_L \cdot dt + \frac{1}{L_2} \int v_L \cdot dt$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad [3.6]$$

Capacitor

$$i = i_1 + i_2$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = C_1 \frac{dv_C}{dt} + C_2 \frac{dv_C}{dt}$$

$$C = C_1 + C_2 \quad [3.7]$$

FIG.3.6 CAPACITORES EN PARALELO

Varios elementos en paralelo

Los planteos anteriores se pueden extender a N elementos en serie, resultando:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

4. Fuentes - Funciones excitación**4.1 Funciones básicas**

Hasta aquí nos hemos referido a los elementos pasivos de los circuitos, cada uno de los cuales se define por un parámetro constante².

Una fuente se define por la función del tiempo que representa la tensión o la corriente que produce, llamada función excitación.

En general vamos a considerar sólo el semieje positivo de tiempos, asumiendo que las funciones son nulas para tiempos negativos.

Las mayor parte de las fuentes se pueden representar mediante las siguientes cuatro funciones que llamamos básicas o por combinación de ellas.

² Esto es para el campo que abarca nuestro estudio, ya que puede haber parámetros que varíen con el tiempo o por la acción de variables externas.

Pueden existir fuentes que respondan a otras funciones básicas, como parábolas, hipérbolas, etc., pero son poco comunes.

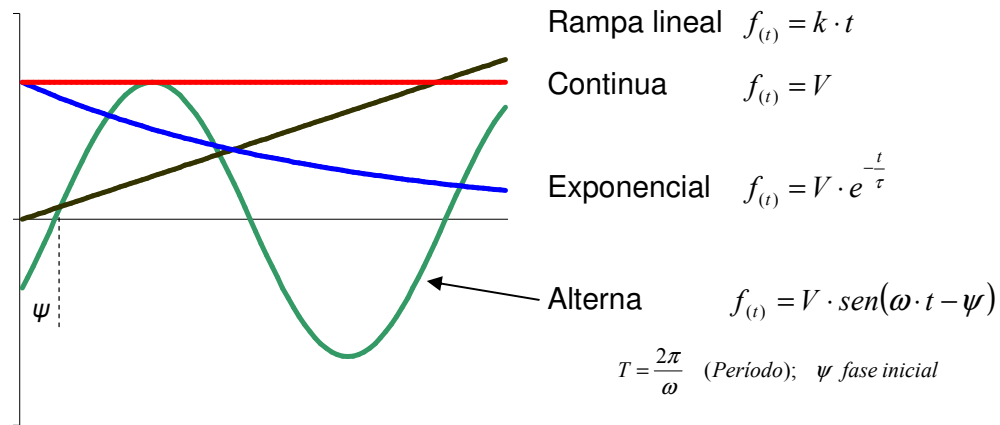


FIG.4.1 FUNCIONES BÁSICAS

4.2 Funciones compuestas

La representación de la tensión o la corriente entregada por una fuente puede ser la combinación de dos o más funciones básicas.

Existen dos modos en que se produce esta combinación:

por superposición

por tramos o intervalos

Funciones compuestas por Superposición

Es el caso de las funciones que resultan de la suma de ordenadas de dos o más funciones básicas. Un circuito lineal, excitado con una fuente representada por una función compuesta de este tipo, se puede resolver aplicando el principio de superposición.

Supongamos por ejemplo que la fuente produce una rampa lineal que tiene un valor no nulo en el origen. Esa fuente se podría reemplazar por dos fuentes representadas por funciones básicas: una constante y una rampa.

La respuesta del circuito a esa fuente compuesta será la suma de la respuesta a la fuente constante y a la rampa básica.

Llamamos respuesta a alguna variable de interés (corriente o tensión) producida por la acción de la fuente que excita el circuito.

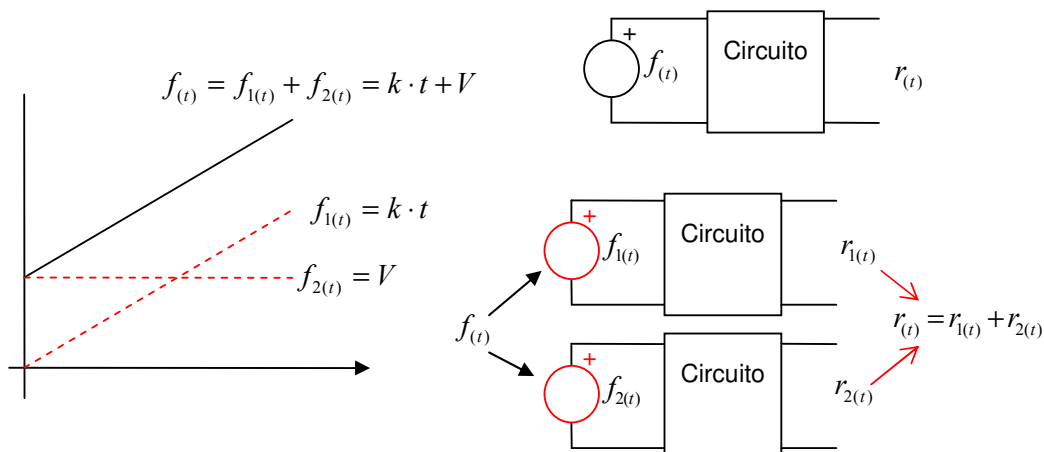


FIG.4.2 SUPERPOSICIÓN DE FUENTES

Funciones compuestas por Intervalos

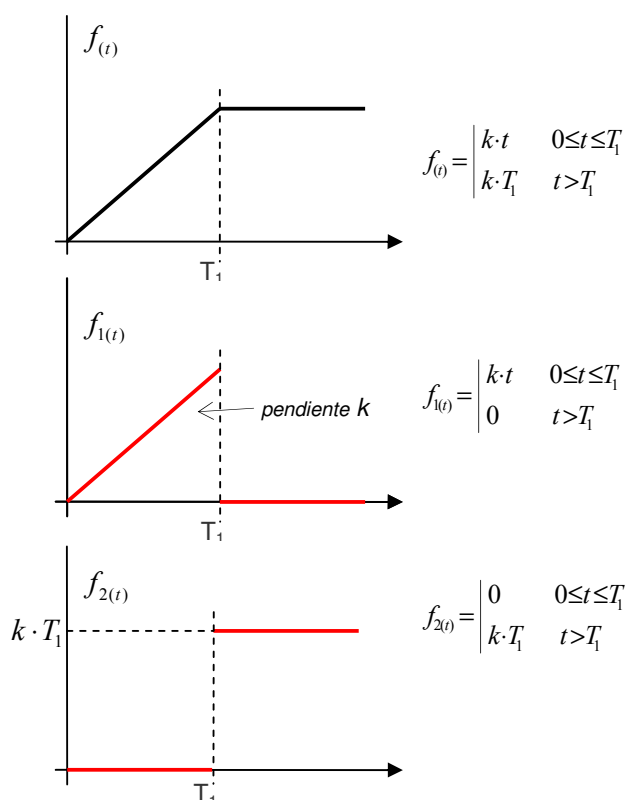


FIG.4.3 FUENTES VARIABLES POR INTERVALOS

Es el caso de las funciones que en distintos intervalos de tiempo se representan mediante tramos de funciones básicas.

Supongamos por ejemplo que un circuito se excita con una fuente definida por una función $f(t)$ que inicialmente es una rampa, hasta que al llegar a un cierto valor se estabiliza. O sea que presenta dos intervalos claramente diferenciados.

El primer intervalo se puede representar como un tramo de una rampa al que llamamos $f_1(t)$, y el otro intervalo como un tramo de una constante, al que llamamos $f_2(t)$.

O sea: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

Se indica expresamente que se trata de tramos de

funciones básicas, ya que si se tratase de una rampa y una constante, la suma de ambas no daría por resultado la función propuesta.

4.3 Funciones singulares

Función Impulso

La función impulso o Delta de Dirac es una función ideal, que en electrotecnia se emplea para simplificar la representación de corrientes o tensiones de muy corta duración y gran amplitud. Se simboliza $\delta_{(t-a)}$

Su valor es infinito en el instante $t=a$ y nulo en el resto del eje tiempo. Además su integral en todo el eje tiempo es 1, es decir que su área es 1.

La representación gráfica y formulación matemática son las siguientes.

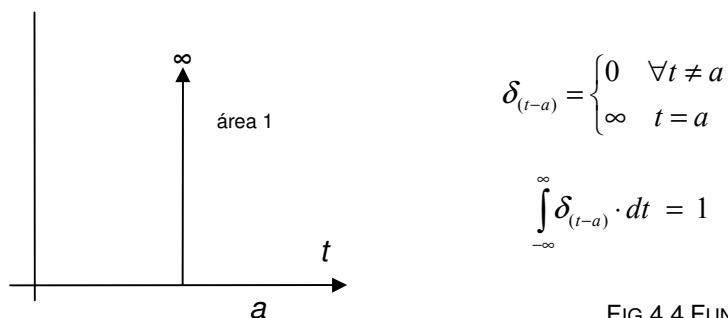


FIG.4.4 FUNCIÓN IMPULSO

Un impulso de área A se expresa $A \cdot \delta_{(t-a)}$. También vale infinito en $t=a$ y cero el resto del tiempo.

El siguiente ejemplo muestra dos funciones del mundo real que pueden representarse mediante un impulso. Se observa que el área de tales funciones coincide con la del impulso.

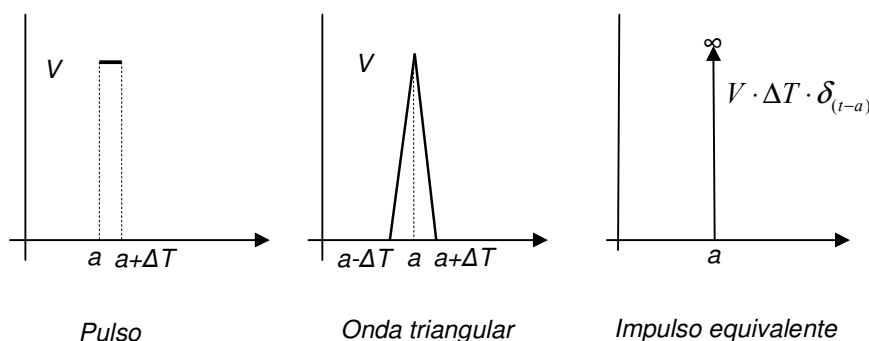


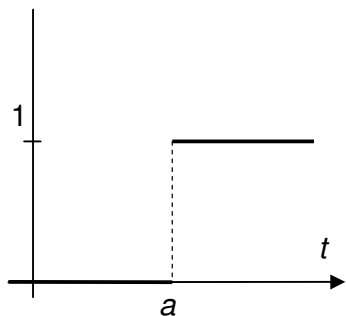
FIG.4.5 FUNCIONES REEMPLAZADAS POR UN IMPULSO

Función Escalón

La función Escalón, también llamada Escalón de Heaviside, simbolizada como $H_{(t-a)}$, vale cero para $t < a$ y vale 1 para $t > a$. En $t = a$ su valor es indefinido.

El escalón es la integral del impulso. O viceversa, el impulso es la derivada del escalón.

La representación gráfica y las expresiones matemáticas que definen esta función son las siguientes.



$$H_{(t-a)} = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

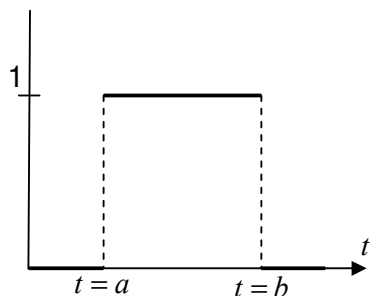
$$\frac{dH_{(t-a)}}{dt} = \delta_{(t-a)}$$

FIG.4.6 FUNCIÓN ESCALÓN DE HEAVISIDE

Un escalón de amplitud V se representa con $V \cdot H_{(t-a)}$

Función Pulso

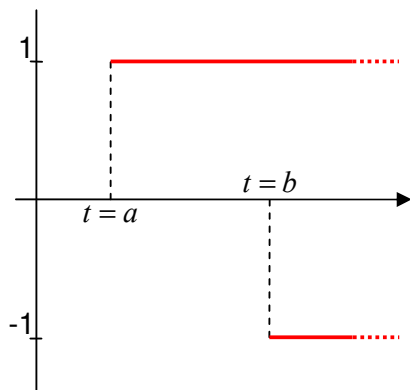
El pulso es una función constante que toma un valor no nulo dentro de un cierto intervalo. Fuera de ese intervalo su valor es cero.



$$P_{(a;b)} = \begin{cases} 1 & a \leq t \leq b \\ 0 & t < a \text{ y } t > b \end{cases}$$

FIG.4.7 FUNCIÓN PULSO

Se puede expresar como la suma de dos escalones



El primer escalón, de amplitud 1, nace en $t=a$; desde ese instante hasta $t=b$ coincide con el valor del pulso. Como a partir de $t=b$ el pulso toma valor cero, debemos agregar un escalón de amplitud -1 para anular el anterior.

$$P_{(a;b)} = H_{(t-a)} - H_{(t-b)}$$

Un pulso de amplitud A se expresa:

$$A \cdot P_{(a;b)} = A \cdot H_{(t-a)} - A \cdot H_{(t-b)}$$

FIG.4.8 DESCOMPOSICIÓN DEL PULSO EN DOS ESCALONES.

Un escalón $H_{(t-a)}$ se puede pensar como un pulso $P_{(a;\infty)}$.

4.4 Funciones basadas en funciones básicas

Tramos de funciones básicas

Un tramo de una función básica es una función que es igual a la función básica dentro de un cierto intervalo e igual a cero fuera de ese intervalo.

El escalón $A \cdot H_{(t-a)}$ es un tramo de una función constante de valor A , ya que es igual a la constante A en el intervalo (a, ∞) e igual a cero fuera de ese intervalo.

El pulso $A \cdot P_{(a,b)}$ también es un tramo de la constante A pero en el intervalo (a,b)

Los tramos de funciones se pueden expresar matemáticamente con el auxilio de las funciones pulso o escalón, como muestra el siguiente ejemplo.

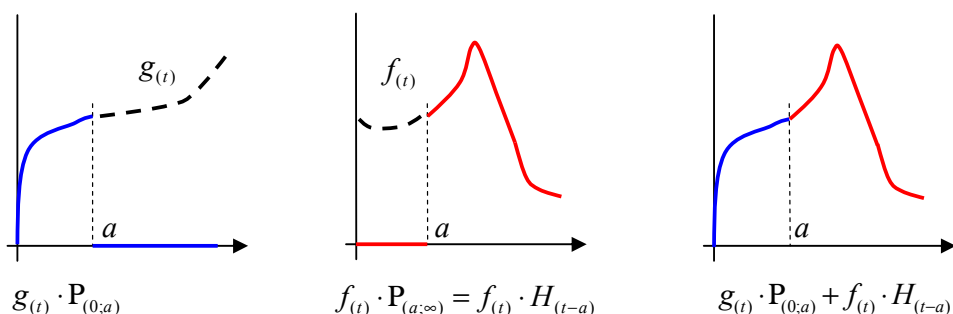


FIG.4.9 FUNCIONES VARIABLES POR INTERVALOS

Hasta aquí hemos convenido que todas las funciones son nulas para $t < 0$, salvo que se indique expresamente lo contrario.

Por ejemplo, al escribir $f_{(t)} = k \cdot t$,

interpretaremos que se trata de la función denominada rampa lineal, que nace en el origen, como se muestra con línea llena en la figura. Sin embargo, en términos estrictamente matemáticos a esta función también corresponde la parte dibujada en línea de trazos.

Formalmente, la función que nace en el origen se debería escribir:

$$f_{(t)} = k \cdot t \cdot H_{(t-0)}$$

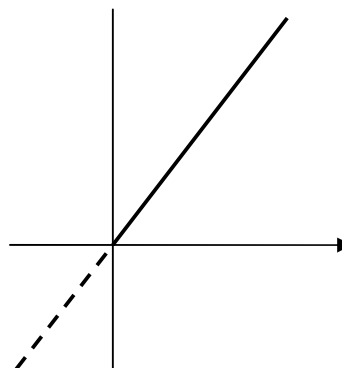


FIG.4.10 RAMPA LINEAL

Funciones desplazadas

Dada una función $f_{(t)}$, sabemos que la función $f_{(t-a)}$ es la misma función desplazada una constante a en el eje tiempo.

Debemos tener especial cuidado cuando la función que se desplaza es nula para $t < 0$, ya que si no explicitamos el multiplicador $H_{(t-a)}$, podemos incurrir en un error.

Supongamos que se desea desplazar la rampa $k \cdot t \cdot H_{(t-0)}$.

Para obtener la función desplazada en a , debemos reemplazar la variable t por $t-a$. La primera figura muestra la solución correcta; en la segunda se omitió la existencia del escalón, entonces, si bien el desplazamiento es correcto, la función considerada no es la deseada; y en la tercera, si bien se tuvo en cuenta el escalón, el desplazamiento se aplicó sólo la rampa.

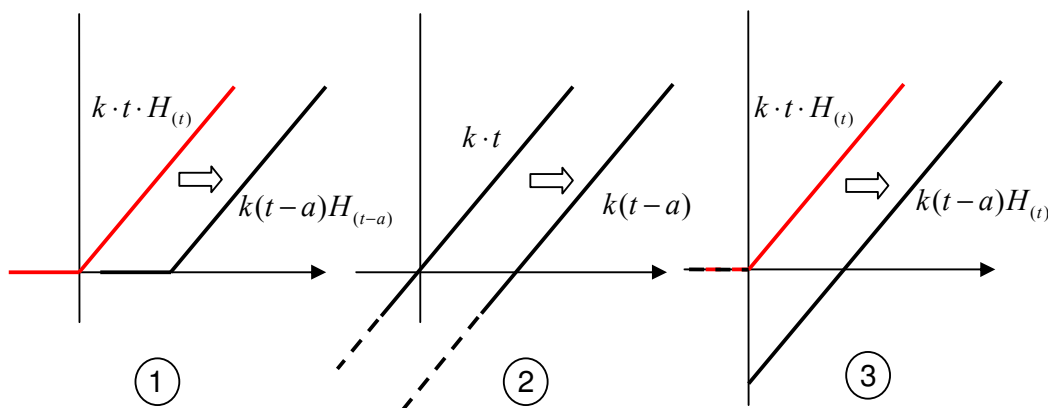


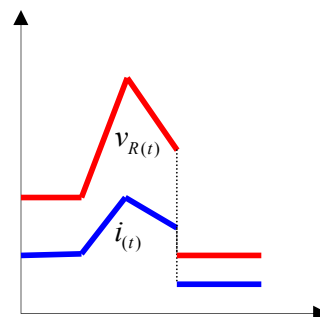
FIG.4.11 FUNCIONES DESPLAZADAS

5. Comportamiento ante conmutaciones

5.1 Resistores

La ley de Ohm establece una relación de proporcionalidad entre la tensión y la corriente en un resistor, es decir que cualquiera de estas variables que se fuerce mediante una fuente, es seguida en sus variaciones por la otra.

La gráfica muestra que aunque con distintas escalas, la forma de la tensión y la corriente en función del tiempo es la misma.

FIG.5.1 PROPORCIONALIDAD $v-i$ EN EL RESISTOR

5.2 Inductor y capacitor

Las relaciones entre la tensión y la corriente en los inductores y en los capacitores no son proporciones como en los resistores, sino derivadas e integrales. De allí que no podamos esperar que las variaciones de una variable sean seguidas por la otra.

Si una variable es la integral de otra, tiene la propiedad de que su variación es continua, independientemente de cómo varíe el integrando.

En la figura se muestra una función con varias discontinuidades y su integral, que resulta continua. Por el contrario, la derivada de una función continua, puede tener discontinuidades.

Debemos tener la precaución de no sacar conclusiones a partir de situaciones ideales. Por ejemplo, la integral de un impulso es un escalón, función que presenta una discontinuidad, pero el impulso es una función ideal, sin existencia en el mundo de la electrotecnia, ya que ninguna tensión o corriente puede asumir un valor infinito en un instante.

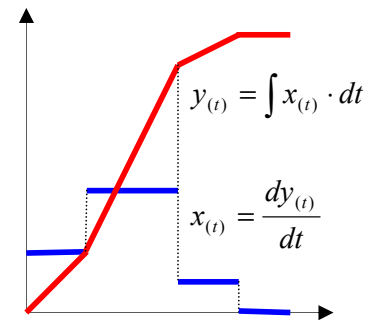


FIG.5.2 RELACIONES DIFERENCIALES EN INDUCTORES Y CAPACITORES

Como:

$$v_C = \frac{1}{C} \int i_C \cdot dt \quad y \quad i_L = \frac{1}{L} \int v_L \cdot dt$$

podemos decir que la tensión en el capacitor y la corriente en el inductor variarán en forma continua.

No podemos decir lo mismo sobre la corriente en un capacitor o la tensión en un inductor, que se obtienen a partir de sendas derivadas.

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad y \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

Otra forma de deducir la continuidad de la tensión en un capacitor y la corriente en un inductor es en base al principio de la física que establece que la energía almacenada en un cuerpo no puede variar en forma discontinua.

Para ello utilizamos las ecuaciones obtenidas en el punto 2.2 que establecen la dependencia directa de energía con corriente para el inductor y de energía con tensión para el capacitor.

$$\mathcal{E}_{L(t)} = \frac{1}{2} L \cdot i_{L(t)}^2 \quad \mathcal{E}_{C(t)} = \frac{1}{2} C \cdot v_{C(t)}^2$$

5.3 Leyes de la conmutación

Como conclusión del análisis desarrollado en el punto anterior se establecen ecuaciones, denominadas Leyes de la conmutación, que según veremos serán de gran utilidad para el estudio del régimen transitorio.

Matemáticamente podemos expresar la continuidad de una función estableciendo que la diferencia entre valores separados un tiempo de orden diferencial es también diferencial.

$$v_{C(t-dt)} = v_{C(t+dt)} + dv_C \quad [5.1]$$

$$i_{L(t-dt)} = i_{L(t+dt)} + di_L \quad [5.2]$$

A los fines prácticos podemos despreciar los diferenciales de tensión o corriente y escribir:

$$v_{C(t-dt)} = v_{C(t+dt)} \quad [5.3]$$

$$i_{L(t-dt)} = i_{L(t+dt)} \quad [5.4]$$

o bien, usando una notación más sencilla, donde $t - dt = t^-$ y $t + dt = t^+$

$$v_{C(t^-)} = v_{C(t^+)} \quad [5.5]$$

$$i_{L(t^-)} = i_{L(t^+)} \quad [5.6]$$

Siempre que es posible, para simplificar el análisis, se ubica el eje tiempo de manera que el instante de una conmutación coincide con $t = 0$. De tal manera, salvo indicación explícita en contrario, al referirnos a $t = 0$ entenderemos que es el instante de una conmutación, y $t = 0^-$ y $t = 0^+$, los instantes inmediato anterior y posterior respectivamente. Siendo así, las ecuaciones anteriores se escriben:

$$v_{C(0^-)} = v_{C(0^+)} \quad [5.7]$$

$$i_{L(0^-)} = i_{L(0^+)} \quad [5.8]$$

Por su parte, los valores de las variables en $t = 0^+$ se denominan condiciones iniciales y los valores en $t = 0^-$ condiciones previas. Sin embargo, las tensiones de capacitores o las corrientes de inductores, por ser iguales en $t = 0^-$ y $t = 0^+$ suelen llamarse indistintamente condiciones iniciales.

5.4 Circuitos equivalentes en $t = 0^+$

Para determinar el régimen de un circuito en $t = 0^+$ debemos aplicar las leyes de la conmutación, o sea considerar que los capacitores preservan la tensión y los inductores la corriente que tenían en $t = 0^-$, mientras que los resistores no preservan ninguna variable.

Lo anterior puede materializarse mediante un circuito equivalente para el instante $t = 0^+$ donde cada capacitor se reemplaza por una fuente de tensión igual a su tensión en $t = 0^-$ y cada inductor por una fuente de corriente igual a su corriente en $t = 0^-$.

Esto se muestra en la Fig. 5.3

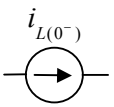
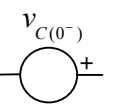
Elemento	R	L	C
Circuito equivalente en $t=0^+$ (condiciones iniciales <u>no</u> nulas)			
Circuito equivalente en $t=0^+$ (condiciones iniciales nulas)			

FIG.5.3 CIRCUITOS EQUIVALENTES EN $t = 0^+$

Ejemplo

En el circuito de la figura el conmutador está inicialmente en la posición 1, habiendo 5V en el capacitor y una corriente de 1A a través del inductor.

En $t=0$ el conmutador pasa a la posición 2.

Se desea determinar el régimen del circuito en $t=0^+$.

Para ello reemplazamos los elementos del circuito por su equivalente en $t=0^+$, incluso el conmutador.

De tal manera, el potencial entre a y b queda fijado por la fuente de 5V que sustituye al capacitor. La tensión en la resistencia de la izquierda es 5V por lo que la corriente es 1A (saliendo de a).

La corriente en la otra resistencia queda determinada por la fuente de corriente de 1A que reemplaza al inductor, por lo tanto su tensión es de 5V.

Aplicando la ley de Kirchoff de tensiones en la malla de la derecha deducimos que la tensión en el inductor es nula, y aplicando la ley de Kirchoff de corrientes en el nudo a resulta que la corriente por el capacitor es de 2A.

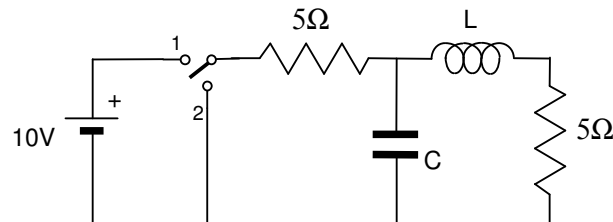
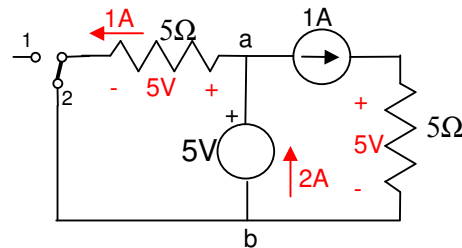


FIG.5.4 CIRCUITO DEL EJEMPLO

FIG.5.5 CIRCUITO EN $t = 0^+$

5.5 Situaciones ideales

Carga de un capacitor con una fuente ideal

Si aceptamos que se conecta una fuente de tensión ideal en forma directa a un capacitor descargado, llegaremos a la conclusión de que el capacitor toma instantáneamente (en un tiempo nulo) la tensión de la fuente, lo que contradice

una de las leyes de la conmutación. Además, para ello sería necesario que el capacitor reciba una cierta carga en un tiempo nulo, lo que implicaría una corriente infinita.

Esos resultados se obtienen por no haber considerado ninguna resistencia entre la fuente y el capacitor. Fundamentalmente deberíamos haber considerado la resistencia interna de la fuente, con lo cual la corriente queda limitada y la carga del capacitor es gradual.

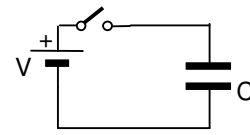


FIG.5.6 CAPACITOR CARGADO CON FUENTE IDEAL

Descarga de un inductor

Supongamos un circuito como el de la figura, con el interruptor cerrado, en el cual circula una cierta corriente.

Si suponemos que el interruptor se abre en un instante, la corriente por el inductor se haría cero en forma inmediata, violando una de las leyes de la conmutación, y además, como

$$v_L = L \frac{di}{dt} ,$$

la tensión en el inductor sería infinita.

Se llega a estos resultados al considerar que el interruptor se abre en un tiempo nulo, lo que no puede ser real.

En la realidad existe un equilibrio entre la velocidad con que disminuye la corriente y la tensión que aparece sobre el inductor. Si la disminución de corriente tiende a ser muy rápida, provoca la aparición de una gran tensión en el inductor, la que al quedar aplicada sobre los contactos del interruptor, crea un arco que se opone al rápido decrecimiento de la corriente. Lo cierto es que los contactos del interruptor deben estar preparados para soportar ese arco eléctrico que disipará parte de la energía almacenada en el inductor (el resto se disipa en el resistor)

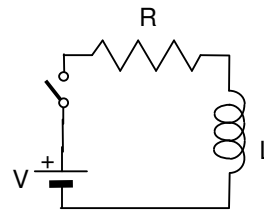


FIG.5.7 DESCONEXIÓN INSTANTÁNEA DE UN INDUCTOR

6. Ecuaciones generales de los circuitos

6.1 Circuitos R-L y R-C

En el punto 3 se estudió la conexión de elementos del mismo tipo. Ahora vamos a comenzar a estudiar la conexión de elementos de distinto tipo.

En este punto veremos circuitos de una malla alimentados por una fuente de tensión, con un solo tipo de elemento acumulador de energía conectado a un resistor: el circuito R-L y el circuito R-C.

Dada la similitud matemática entre uno y otro los analizamos en ‘paralelo’.

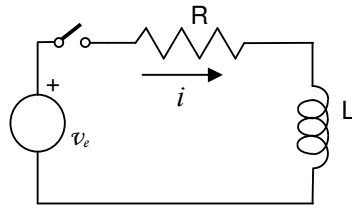


FIG.6.1A CIRCUITO R-L

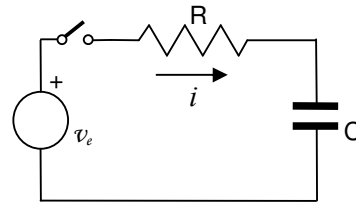


FIG.6.1B CIRCUITO R-C

Por ser circuitos serie planteamos la Ley de Kirchoff de tensiones.

$$v_e = v_R + v_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \qquad v_e = v_R + v_C = R \cdot i + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad [6.1]$$

Dividimos por L y ordenamos:

$$\frac{v_e}{L} = \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i$$

Derivamos y dividimos por R :

$$\frac{1}{R} \frac{dv_e}{dt} = \frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} i \quad [6.2]$$

Suponiendo que la tensión aplicada v_e y los parámetros del circuito son conocidos, esas ecuaciones anteriores permiten obtener la corriente.

Si quisiésemos ecuaciones en función de las tensiones en el inductor y en el capacitor, deberíamos reemplazar la corriente en las ecuaciones [6.1] por:

$$i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L \cdot dt$$

$$i = C \frac{dv_C}{dt}$$

$$\Rightarrow v_e = \frac{R}{L} \int_{-\infty}^t v_L \cdot dt + v_L$$

$$v_e = RC \frac{dv_C}{dt} + v_C \quad [6.3]$$

Derivamos y ordenamos

$$\frac{dv_e}{dt} = \frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L} v_L$$

Dividimos por RC y ordenamos

$$\frac{1}{RC} v_e = \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{RC} v_C \quad [6.4]$$

Las ecuaciones diferenciales [6.2], en función de la corriente, y las [6.4], en función de las tensiones en el inductor y en el capacitor, son ecuaciones diferenciales de primer orden, de coeficientes constantes y no homogéneas³.

Se observa que el término independiente, a la izquierda del signo igual, en todos los casos depende de v_e , mientras que la ecuación homogénea asociada es la misma para la corriente que para la tensión. Por ello, podemos reunir estas ecuaciones en una sola para cada circuito.

$$f_{(v_e)} = \frac{dx}{dt} + \frac{R}{L} x \quad x = i \text{ ó } x = v_L$$

$$f_{(v_e)} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{RC} x \quad x = i \text{ ó } x = v_C$$

³ Una ecuación diferencial es no homogénea cuando el término independiente es distinto de cero.

O bien generalizar una sola ecuación para ambos circuitos:

$$f_{(v_e)} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau} x \quad [6.5]$$

Para el circuito R-L:

$$\tau = \frac{L}{R} \quad x = i \text{ ó } v_L$$

Para el circuito R-C:

$$\tau = RC \quad x = i \text{ ó } v_C$$

La solución de la ecuación [6.5] es la suma de dos componentes: una solución particular x_p y la solución de la ecuación homogénea asociada⁴ x_h .

$$x = x_p + x_h \quad [6.6]$$

En el caso particular en que v_e es cero, el primer miembro de la ecuación diferencial, según se desprende de las ecuaciones [6.2] a [6.4], es cero. O sea que la ecuación es homogénea, la solución es directamente la componente homogénea, y la componente particular es cero.

Solución de la ecuación homogénea asociada

La ecuación homogénea asociada a [6.5] es:

$$0 = \frac{dx_h}{dt} + \frac{1}{\tau} x_h \quad [6.7]$$

Podemos escribir:

$$\frac{dx_h}{dt} = -\frac{1}{\tau} x_h$$

Se evidencia que x es una función cuya derivada es igual a la misma función multiplicada por una constante $(-1/\tau)$.

La función exponencial $e^{-\frac{1}{\tau}t}$ cumple con eso, o más generalizadamente $A \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t}$, donde A es una constante cualquiera.

Cuando estudiemos el circuito RLC, para el que resulta una ecuación diferencial de segundo orden, veremos el método general para hallar las soluciones de las ecuaciones homogéneas de cualquier orden con coeficientes constantes.

Entonces,

$$x_h = A \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad [6.8]$$

Una propiedad de la componente homogénea es que vale cero cuando t tiende a infinito.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_h = \lim_{t \rightarrow \infty} A \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} = 0$$

⁴ La ecuación homogénea asociada a una ecuación diferencial, es la misma ecuación con el término independiente igual a cero.

Componente particular

Cuando $t \rightarrow \infty$, la variable x es igual a la componente particular, pues como hemos visto, la componente homogénea vale cero.

Y como el valor de la variable en infinito es lo que se define como su régimen permanente, resulta que la componente particular es el valor de la variable en régimen permanente. Por tal motivo se la suele llamar componente de régimen permanente.

Para calcular la componente particular o de régimen permanente utilizaremos cualquiera de los métodos estudiados para resolver este tipo de régimen. En el punto 8 se determinan formalmente los regímenes permanentes cuando la excitación del circuito es alguna de las funciones básicas.

Significado y características de las componentes

Observando la ecuación diferencial del circuito [6.5] vemos que su ecuación homogénea asociada (el miembro de la derecha igualado a cero) depende exclusivamente de los parámetros R , L y C . Por lo tanto, la componente homogénea, que es su solución, depende exclusivamente de esos parámetros.

$$f_{(v_e)} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\tau}x$$

La componente particular o de régimen permanente, por ser una solución de la ecuación completa, depende de los parámetros y de la tensión aplicada al circuito.

Durante el régimen transitorio coexisten ambas componentes, pero a medida que transcurre el tiempo, la componente homogénea se va extinguiendo. Finalmente queda sólo la componente particular o de régimen permanente, también llamada componente forzada porque representa el régimen forzado por la fuente que excita el circuito.

Si el circuito no está excitado por alguna fuente, el término independiente de la ecuación diferencial es nulo. Entonces, la ecuación diferencial es homogénea y la única componente de la solución es la homogénea. De hecho, para que un circuito sin fuente tenga un régimen no nulo, es necesario que tenga alguna energía almacenada en inductores o capacitores. Ese régimen se irá extinguiendo conforme la energía almacenada se vaya disipando en los elementos resistivos del circuito, terminando en un régimen permanente nulo. Podemos decir entonces, que la componente homogénea representa el comportamiento intrínseco del circuito, libre de la excitación de alguna fuente. Por tal motivo, la componente homogénea es referida por algunos autores como componente libre. Cualquiera sea la denominación que usemos, mantendremos la notación x_h .

Solución general

Reemplazando la componente homogénea por el resultado obtenido, podemos escribir la ecuación [6.6] de la siguiente manera.

$$x = x_p + A \cdot e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad [6.9]$$

Mantenemos x_p expresado en forma genérica pues depende de la excitación.

Se llama solución general porque es válida para cualquier valor inicial de la variable. Dado un valor inicial $x_{(0)}$, la constante A queda determinada.

Reemplazando en [6.9] $x = x_{(0)}$ y $t = 0$:

$$x_{(0)} = x_{p(0)} + A \Rightarrow A = x_{(0)} - x_{p(0)} \Rightarrow x = x_p + (x_{(0)} - x_{p(0)})e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [6.10]$$

6.2 Circuito R-L-C

Analizamos el circuito R-L-C serie, excitado por una fuente de tensión genérica.

Por tratarse de un circuito serie, planteamos la Ley de Kirchoff de tensiones,

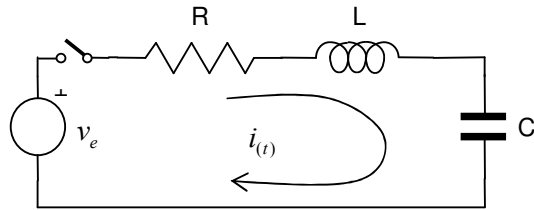


FIG.6.2 CIRCUITO R-L-C SERIE

$$v_e = v_R + v_L + v_C$$

para luego poner cada tensión en función de la variable común, que es la corriente.

$$v_e = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad [6.11]$$

Eliminamos la integral derivando ambos miembros, ordenamos los términos del segundo miembro por orden de derivación y dividimos por L para que el coeficiente del de mayor orden sea 1.

$$\frac{1}{L} \frac{dv_e}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i \quad [6.12]$$

La resolución de la ecuación anterior nos permite obtener la corriente.

Para obtener una ecuación que nos permita obtener la tensión en el capacitor,

podemos reemplazar $i = C \frac{dv_C}{dt}$ en la ecuación [6.11]

$$v_e = R \cdot C \cdot \frac{dv_C}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 v_C}{dt^2} + v_C$$

Ordenamos los términos y hacemos 1 el coeficiente de la derivada de mayor orden, igual que en la ecuación de corriente.

$$\frac{1}{LC} v_e = \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v_C \quad [6.13]$$

Y para obtener una ecuación que nos permita obtener la tensión en el inductor,

reemplazamos $i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L \cdot dt$ en la ecuación [6.11]

$$v_e = R \cdot \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L \cdot dt + v_L + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L \cdot dt$$

Derivamos dos veces para eliminar las integrales y ordenamos con el mismo criterio anterior.

$$\frac{d^2 v_e}{dt^2} = \frac{d^2 v_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v_L \quad [6.14]$$

Las tres ecuaciones diferenciales - [6.12] para la corriente, [6.13] para la tensión en el capacitor y [6.14] para la tensión en el inductor - son de segundo orden, con coeficientes constantes, no homogéneas.

Además se observan dos características comunes a estas ecuaciones:

- Tienen la misma ecuación homogénea asociada
- El término independiente es función de la tensión aplicada al circuito.

Por lo tanto, podemos escribir una ecuación generalizada para el circuito R-L-C

$$f_{(v_e)} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot x \quad [6.15]$$

La variable x es i , v_C ó v_L , según la variable que se pretenda obtener.

La solución tiene dos componentes: una solución particular y la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$x = x_p + x_h \quad [6.16]$$

La ecuación homogénea asociada es la ecuación diferencial con el término independiente igual a cero:

$$0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot x \quad [6.17]$$

En particular si la tensión aplicada al circuito es cero, el término independiente es cero y la ecuación diferencial se reduce a una ecuación homogénea. En tal caso la solución es directamente la componente homogénea.

En general, todas las ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes, de cualquier orden, se resuelven mediante exponenciales, pues la exponencial es una función que derivada cualquier cantidad de veces, sigue siendo una exponencial. De ese modo, todos los sumandos son del mismo tipo y con valores adecuados de los exponentes, su suma puede ser cero.

Si proponemos como solución $A \cdot e^{\lambda \cdot t}$, al reemplazarla en [6.17], obtenemos:

$$0 = \lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} \quad , \quad [6.18]$$

lo que nos dice que hay dos valores posibles de λ ; llamémoslos λ_1 y λ_2 .

Entonces una solución puede ser $A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$ y otra $A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$, pero si ambas funciones resuelven la ecuación diferencial homogénea, la suma de ellas también. Se puede

demostrar que estos dos términos exponenciales son obligatorios para que la solución general se pueda ajustar, mediante adecuados valores de A_1 y A_2 , a todas las condiciones iniciales, lo que no se lograría con un solo término.

La ecuación [6.18] se llama polinomio característico de la ecuación homogénea. Se puede obtener reemplazando cada derivada de orden n por λ^n , y preservando los coeficientes. Sus raíces son:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [6.19]$$

Y la solución de la ecuación homogénea es:

$$x_h = A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad [6.20]$$

En el caso en que $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, ambas raíces son iguales: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L} = \lambda$

Entonces, la ecuación planteada como solución se reduciría a una sola exponencial:

$$x_h = A_1 \cdot e^{\lambda \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda \cdot t} = (A_1 + A_2) \cdot e^{\lambda \cdot t} = A \cdot e^{\lambda \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t}$$

que como se puede comprobar fácilmente, reemplazándola en la ecuación homogénea, no es solución.

En realidad, la solución planteada en [6.20] es válida mientras $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Se puede demostrar (no lo haremos aquí), que cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = -R/2L$, la solución es:

$$x_h = A_1 \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} + A_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} = (A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \quad [6.21]$$

Cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$, desde el punto de vista eléctrico, y dependiendo del valor de R , L y C , se pueden originar dos situaciones que conviene diferenciar, a saber:

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ en cuyo caso $\lambda_{1,2} \in \|\text{Re}\|$, y la solución [6.19] es apropiada.

$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ Aquí $\lambda_{1,2} \in \|\text{Co}\|$, pudiéndose expresar $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_n$
donde $\alpha = \frac{R}{2L}$ y $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$

En este caso, la ecuación [6.19] se puede escribir:

$$x_h = A_1 \cdot e^{(-\alpha - j\omega_n) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(-\alpha + j\omega_n) \cdot t}$$

Pero no resulta apropiada, pues da la impresión de ser compleja cuando es real, como toda función del tiempo.

Apliquemos a la ecuación que obtuvimos para raíces complejas, las identidades de Euler: $e^{\pm j\omega_n t} = \cos \omega_n t \pm j \sin \omega_n t$, y consideremos que las constantes deben ser

complejas conjugadas: $A_{1,2} = a \pm jb$, pues si no lo fueran aparecerían 4 constantes.

$$x_h = A_1 \cdot e^{(-\alpha - j\omega_n)t} + A_2 \cdot e^{(-\alpha + j\omega_n)t}$$

$$= e^{-\alpha t} [(a + jb)(\cos \omega_n t - j \operatorname{sen} \omega_n t) + (a - jb)(\cos \omega_n t + j \operatorname{sen} \omega_n t)]$$

De aquí resulta: $x_h = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t)$ [6.22]

Siendo $B_{1,2}$ constantes reales, resultado de combinaciones de a y b .

La ecuación [6.21] muestra que cuando las raíces del polinomio característico son complejas, la componente homogénea es una función con oscilaciones de frecuencia ω_n . Por este motivo se denomina caso oscilante o periódico (el período es $T_n = 2\pi / \omega_n$).

Por su parte, el caso de raíces reales distintas (ecuación [6.19], se llama aperiódico o no oscilante, y el caso de raíces iguales (ecuación [6.20]) se llama crítico o límite.

Resumiendo:

$x = x_p + \begin{cases} \nearrow \\ \rightarrow \\ \searrow \end{cases}$	$(A_1 + A_2 \cdot t) \cdot e^{-\alpha t}$	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$	Caso crítico
	$A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$	Caso aperiódico
	$e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_n t + B_2 \operatorname{sen} \omega_n t)$	$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C} \\ \text{con } \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega_0 \end{cases}$	Caso periódico

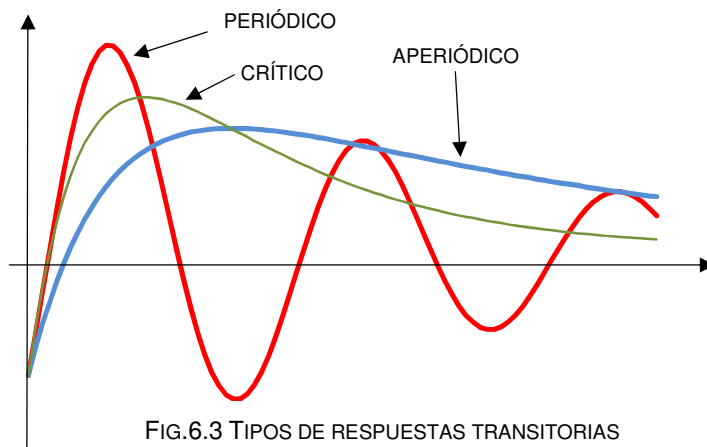


FIG.6.3 TIPOS DE RESPUESTAS TRANSITORIAS

En la figura se muestran curvas típicas de los tres tipos de respuesta.

Los valores de abscisas, la frecuencia y la rapidez con que las curvas tienden a cero varían en un amplio rango según las características del circuito.

Las soluciones obtenidas son generales, por ser aplicables a cualquier estado inicial del circuito. Para un estado inicial en particular, las constantes genéricas que aparecen en estas soluciones quedan unívocamente determinadas.

Hemos visto que cuando la tensión aplicada al circuito es nula, la ecuación diferencial es homogénea y por ello, la solución consta sólo de la componente homogénea. Todo régimen que se establezca en tal circunstancia obedecerá a

energías almacenadas en inductores y capacitores, y tenderá hacia un régimen nulo a medida que esas energías se disipen en los resistores del circuito.

O sea: $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h = 0$

Esto puede comprobarse analizando los tres casos de componente homogénea.

En el caso crítico, encontramos una indeterminación tipo $\infty \cdot 0$ en el término $t \cdot e^{-\alpha t}$. Sin embargo, aplicando la regla de L'Hôpital se ve que el límite es 0.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot e^{-\alpha t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha \cdot e^{\alpha t}} = 0$$

En el caso aperiódico las raíces son:

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

La raíz λ_1 es la suma de dos números negativos; por ende es negativa.

La raíz λ_2 es la suma de un número negativo y uno positivo; siendo mayor el valor absoluto del primero, la raíz es negativa. Obsérvese que el segundo número sólo podría igualar en valor absoluto al primero si $-1/LC$ fuera cero, pero ello es imposible, pues requeriría de una inductancia o una capacidad infinitas.

Siendo λ_1 y λ_2 negativas, el límite es 0.

Finalmente, en el caso periódico tenemos una exponencial negativa que multiplica el término finito dado por la suma de un seno y un coseno. Por lo tanto, el límite también es 0.

Significado de las componentes

La componente homogénea, también llamada componente libre, es el régimen natural del circuito cuando no hay fuentes que lo exciten. Los parámetros del circuito determinan el tipo de régimen y las energías almacenadas inicialmente determinan el valor de las constantes genéricas de la solución general.

Para $t = \infty$, es decir cuando se alcanzó el régimen permanente, la componente homogénea es cero, quedando sólo la componente particular. La componente particular es el régimen permanente.

Resistencia crítica

Es el valor resistencia para el cual se produce la respuesta crítica. O sea:

$$\left(\frac{R_c}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad [6.23]$$

Si estamos en el caso de respuesta crítica, para llevar el circuito a una respuesta oscilante podemos hacer alguna de las siguientes modificaciones:

- reducir la resistencia
- reducir la capacidad
- aumentar la inductancia

Cabría preguntar porqué se habla de resistencia crítica y no de inductancia o capacidad crítica. La contestación es que la resistencia tiene mayor incidencia en la modificación del régimen, pues influye en forma cuadrática, mientras que los otros elementos inciden linealmente.

Amortiguación y frecuencias natural y de resonancia

Dado que la componente homogénea es el régimen natural del circuito, en el caso periódico, la frecuencia ω_n se llama frecuencia natural.

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = +\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad \text{pues} \quad \left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad [6.24]$$

Por su parte, la frecuencia de resonancia es aquella en que las reactancias inductiva y capacitiva, con excitación sinusoidal, son iguales:

$$\omega_r \cdot L = \frac{1}{\omega_r C} \Rightarrow \frac{1}{LC} = \omega_r^2 \quad [6.25]$$

Y el amortiguamiento es el valor absoluto del exponente de e en la componente homogénea:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad [6.26]$$

Entonces: $\omega_n^2 = \omega_r^2 - \alpha^2 \quad \text{ó} \quad \omega_r^2 = \omega_n^2 + \alpha^2 \quad [6.27]$

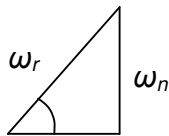


FIG.6.4 TRIÁNGULO DE FRECUENCIAS

Según muestra la figura, podemos relacionar el amortiguamiento y ambas frecuencias como los lados de un triángulo rectángulo. Las frecuencias son iguales cuando no hay amortiguamiento (caso ideal de resistencia nula). A medida que crece, la frecuencia natural disminuye, llegando a cero cuando el amortiguamiento alcanza el valor de la frecuencia de resonancia. Ese es el caso crítico donde ya no hay oscilaciones. Si el amortiguamiento aumenta aún más estamos en el caso aperiódico también llamado sobreamortiguado, en el cual no hay oscilaciones y esta representación carece de sentido.

La componente homogénea en el caso periódico se puede expresar de la siguiente manera:

$$x_h = e^{\alpha t} M \cdot \text{sen}(\omega_n t + \phi) \quad [6.28]$$

Donde se han reemplazado las dos funciones armónicas que teníamos por una sola desplazada:

$$M \cdot \text{sen}(\omega_n t + \phi) = B_1 \cdot \cos \omega_n t + B_2 \cdot \text{sen} \omega_n t$$

Si desarrollamos el seno de la suma de dos ángulos que aparece en el primer miembro:

$$M \cdot \text{sen} \phi \cdot \cos \omega_n t + M \cdot \cos \phi \cdot \text{sen} \omega_n t = B_1 \cdot \cos \omega_n t + B_2 \cdot \text{sen} \omega_n t$$

Por comparación, obtenemos: $M \cdot \cos \phi = B_2$ y $M \cdot \text{sen} \phi = B_1$

Si elevamos esas expresiones al cuadrado y las sumamos, resulta:

$$M^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = B_2^2 + B_1^2$$

$$\Rightarrow M^2 = B_2^2 + B_1^2 \Rightarrow M = \sqrt{B_2^2 + B_1^2} \quad [6.29]$$

Y si hacemos el cociente entre ambas: $\phi = \arctg \frac{B_1}{B_2}$ [6.30]

Circuito R-L-C paralelo

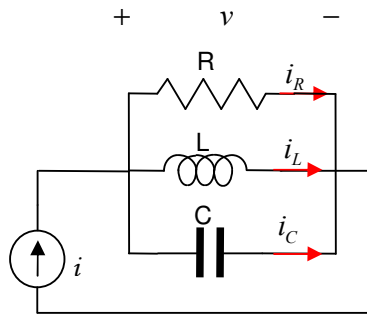


FIG.6.5 CIRCUITO R-L-C PARALELO

El estudio de este circuito, cambiando tensiones por corrientes, es igual casi igual al del circuito R-L-C serie.

En este caso, la excitación no es una fuente de tensión sino una fuente de corriente. El análisis parte de plantear la Ley de Kirchoff de corrientes:

$$i = i_R + i_L + i_C$$

Luego, ponemos cada corriente en función de la tensión v que es común a todos los elementos del circuito.

$$i = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v \cdot dt + C \frac{dv}{dt} \quad [6.31]$$

de donde surge la siguiente ecuación diferencial de segundo orden que permite obtener la tensión v .

$$\frac{1}{C} \frac{di}{dt} = \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v \quad [6.32]$$

Para obtener las ecuaciones de i_L y de i_C reemplazamos en la ecuación anterior:

$$v = v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad \text{y} \quad v = v_C = \frac{1}{C} \int i_C \cdot dt$$

Se obtiene:

$$\frac{1}{LC} i_L = \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L \quad [6.33]$$

$$\frac{d^2 i}{dt} = \frac{d^2 i_C}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_C}{dt} + \frac{1}{LC} i_C \quad [6.34]$$

Se observa que todas estas ecuaciones diferenciales, tal como ocurrió con el circuito serie, tienen la misma ecuación homogénea asociada, pudiéndose escribir en forma generalizada:

$$f_{(i)} = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x \quad [6.35]$$

; dónde x puede ser v , i_L ó i_C .

En el siguiente cuadro se muestran las diferencias entre las ecuaciones del circuito RLC serie y el RLC paralelo:

	<u>Término independiente</u>	<u>Coeficiente de la derivada primera</u>
<u>Circuito serie</u> [6.15]	Depende de la tensión de excitación.	Inversa de la constante de tiempo τ formada por R y L $\tau = L / R$
<u>Circuito paralelo</u> [6.35]	Depende de la corriente de excitación	Inversa de la constante de tiempo τ formada por R y C $\tau = RC$

Con esas aclaraciones, la siguiente ecuación cubre ambos circuitos:

$$f_{(excitación)} = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{LC} x \quad [6.36]$$

La solución dependerá de las raíces del polinomio característico:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad [6.37]$$

; siendo $\tau = RC$ para el circuito paralelo y $\tau = \frac{L}{R}$ para el serie.

Como en el circuito serie tendremos tres casos: aperiódico, crítico y periódico.

La resistencia crítica puede obtenerse igualando a cero el radicando. Resulta ser la cuarta parte de la correspondiente al circuito serie (Ver [6.23])

$$R_{crítica} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad [6.38]$$

En el caso periódico, el amortiguamiento es $\alpha = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{2RC}$ [6.39]

Y la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$ [6.40]

Por lo demás, la resolución del circuito paralelo es igual a la del circuito serie, motivo por el cual concluimos aquí este análisis.

7. Régimen Permanente

La ecuación que describe el régimen transitorio de un circuito es la suma de dos componentes:

una solución particular de la ecuación diferencial del circuito
y la solución de la ecuación homogénea asociada.

En el punto anterior obtuvimos las ecuaciones generales del régimen transitorio en los circuitos R-C, R-L y R-L-C dedicando la mayor atención a la obtención de la componente homogénea. Con respecto a la componente particular sólo demostramos que coincide con el régimen permanente del circuito.

En este punto vamos a ver cómo se determina el régimen permanente de un circuito R-L-C para tres de las excitaciones básicas definidas en el punto 4.1. Analizaremos primero la excitación exponencial, y luego, como casos particulares de la misma, la excitación continua y la excitación alterna.

La cuarta excitación básica se considerará en el punto 8.

Trabajaremos con el circuito R-L-C, ya que según veremos, los resultados obtenidos son fácilmente aplicables a los circuitos R-L y R-C.

7.1 Excitación exponencial

La expresión matemática de una tensión de entrada o excitación exponencial es la siguiente:

$$v_e = V \cdot e^{s \cdot t} \quad [7.1]$$

La constante V se llama módulo y es el valor en el origen, mientras que el exponente s , determina el grado de crecimiento (si es positivo) o de decrecimiento (cuando es negativo).

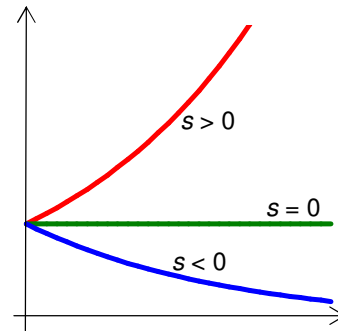


FIG.7.1 EXPONENCIALES

En el punto 6.2 obtuvimos las ecuaciones diferenciales del circuito R-L-C en función de la corriente ([6.12]), la tensión en el capacitor ([6.13]), y la tensión en el inductor ([6.14]). La solución particular de cada una de estas variables debe satisfacer la respectiva ecuación. Para que ello sea factible deben ser necesariamente exponenciales con el mismo exponente que la tensión de entrada. Por lo tanto propondremos soluciones con esa característica y un módulo genérico a determinar.

Para la corriente proponemos: $i_p = I \cdot e^{s \cdot t}$ [7.2]

y reemplazamos en la ecuación $\frac{1}{L} \frac{dv_e}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i$ [6.12]

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{V}{L} \frac{de^{s \cdot t}}{dt} &= I \frac{d^2 e^{s \cdot t}}{dt^2} + \frac{R}{L} I \frac{de^{s \cdot t}}{dt} + \frac{1}{LC} I \cdot e^{s \cdot t} \Rightarrow \\ \frac{V}{L} s \cdot e^{s \cdot t} &= I \cdot s^2 \cdot e^{s \cdot t} + \frac{R \cdot I}{L} s \cdot e^{s \cdot t} + \frac{1}{LC} I \cdot e^{s \cdot t} \Rightarrow \frac{V}{L} s = I \cdot s^2 + \frac{R}{L} I \cdot s + \frac{1}{LC} I \end{aligned}$$

De allí podemos despejar el valor de I :

$$I = \frac{\frac{V}{L} \cdot s}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}} = \frac{V}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \quad [7.3]$$

Luego, $i_p = \frac{V}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} e^{s \cdot t}$ [7.4]

Como el numerador del módulo de la corriente es una tensión, el denominador es una impedancia. La llamamos impedancia con excitación exponencial y su valor depende del exponente s .

$$Z_{(s)} = Ls + R + \frac{1}{Cs} \quad [7.5]$$

Los tres términos que componen la impedancia se llaman:

$$\begin{array}{ll} R & \text{resistencia} \\ X_L = Ls & \text{reactancia inductiva} \\ X_C = \frac{1}{Cs} & \text{reactancia capacitiva} \end{array}$$

Para hallar v_{Cp} proponemos $v_{Cp} = V_C \cdot e^{st}$

y reemplazamos en la ecuación $\frac{1}{LC}v_e = \frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot v_C$ [6.13]

resultando:

$$v_{Cp} = \frac{V}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} \frac{1}{Cs} e^{st} \quad [7.6]$$

Finalmente, para v_{Lp} proponemos: $v_{Lp} = V_L \cdot e^{st}$

y reemplazamos en la ecuación $v_e = \frac{d^2v_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{LC}v_L$ [6.14]

resultando:

$$v_{Lp} = \frac{V}{\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} Ls \cdot e^{st} \quad [7.7]$$

Se observa que los módulos de v_C y v_L son iguales al módulo de la corriente multiplicados por la reactancia capacitiva e inductiva respectivamente.

7.2 Excitación continua

La excitación exponencial coincide con la excitación continua cuando $s = 0$.

$$v_e = V \cdot e^{st} \Big|_{s=0} = V \quad [7.8]$$

Entonces podemos aplicar los resultados obtenidos para excitación exponencial haciendo $s = 0$.

$$\begin{array}{l} R \\ X_L = Ls = 0 \\ X_C = \frac{1}{Cs} = \infty \end{array}$$

Vemos que la resistencia no cambia, pero la reactancia inductiva es cero, comportándose como un corto-circuito, y la reactancia capacitiva es infinita, comportándose como un circuito abierto.

Para resolver el régimen permanente de un circuito con excitación continua, podemos reemplazar los inductores por cortocircuitos y los capacitores por circuitos abiertos, como en el ejemplo de la figura.

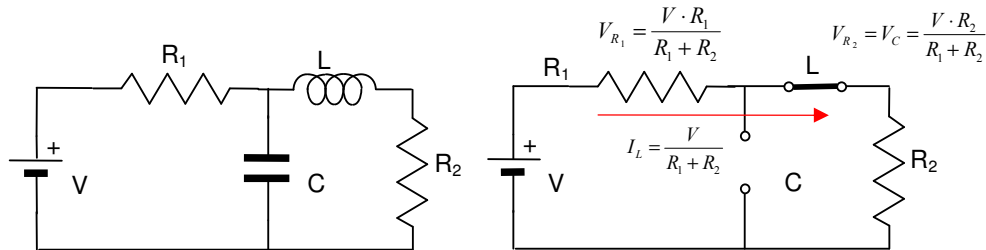


FIG.7.2 APLICACIÓN DE LOS CIRCUITOS EQUIVALENTES EN RÉGIMEN PERMANENTE

7.3 Excitación alterna

Llamamos excitación alterna, o armónica, a aquella representada por una función sinusoidal, como la siguiente:

$$v_e = V \sin \omega t \quad [7.9]$$

ω es la pulsación, aunque por simplicidad se la refiera como frecuencia, aún cuando no sea exactamente lo mismo, pues $\omega = 2\pi f$

Si en la función de excitación exponencial [7.1] fuera $s = j\omega$, podríamos escribirla (aplicando la identidad de Euler) de la siguiente manera:

$$v_e = V e^{s \cdot t} \Big|_{s=j\omega} = V e^{j\omega t} = V (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

De donde surge que la excitación alterna es la parte imaginaria de la excitación exponencial con $s = j\omega$

$$v_e = \Im \left\| V e^{s \cdot t} \right\|_{s=j\omega}$$

Naturalmente, no existe una excitación eléctrica de tipo exponencial con un exponente imaginario. Sin embargo, matemáticamente una función v_e , que es parte del término independiente de las ecuaciones diferenciales estudiadas, puede tener exponente imaginario, y las soluciones obtenidas i_p , v_{Cp} y v_{Lp} serán válidas con $s = j\omega$, aunque no existan en el mundo físico.

Luego, si la excitación es la parte imaginaria de v_e , la solución particular será la parte imaginaria de las soluciones encontradas. Demostremos esto con la ecuación [6.12] correspondiente a la corriente, suponiendo que si se excita con v_{e1} se obtiene una corriente i_1 y si se excita con v_{e2} la corriente resulta i_2 . Sean todas estas variables reales y por ello plausibles para la electrotecnia.

$$\frac{1}{L} \frac{dv_{e1}}{dt} = \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC} i_1$$

$$\frac{1}{L} \frac{dv_{e2}}{dt} = \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{LC} i_2$$

Si sumamos ambas ecuaciones, después de multiplicar ambos miembros de la segunda por j (que no es más que una constante de módulo 1 y argumento 90°), obtenemos una ecuación matemáticamente válida donde la excitación es compleja y la corriente también.

$$\frac{1}{L} \frac{d(v_{e1} + jv_{e2})}{dt} = \frac{d^2(i_1 + ji_2)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d(i_1 + ji_2)}{dt} + \frac{1}{LC} (i_1 + ji_2)$$

Vemos que si excitamos con la parte real v_{e1} de esta excitación compleja, la corriente es la parte real i_1 de la corriente compleja. Análogamente, si excitamos con la parte imaginaria v_{e2} de la excitación compleja, la corriente es la parte imaginaria i_2 de la corriente compleja.

Entonces:

$$i_p = \Im m \left\| \frac{V}{Lj\omega + R + \frac{1}{Cj\omega}} e^{j\omega t} \right\| = \Im m \left\| \frac{V}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} e^{j\omega t} \right\|$$

Escribimos la impedancia en forma polar exponencial: $R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z|e^{j\varphi}$

$$\text{Dónde} \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad y \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad [7.10]$$

$$\begin{aligned} i_p &= \Im m \left\| \frac{V}{|Z|e^{j\varphi}} e^{j\omega t} \right\| = \Im m \left\| \frac{V|Z|e^{-j\varphi}}{|Z|^2} e^{j\omega t} \right\| = \frac{V}{|Z|} \Im m \left\| e^{j(\omega t - \varphi)} \right\| = \\ &= \frac{V}{|Z|} \Im m \left\| \cos(\omega t - \varphi) + j \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \right\| \end{aligned}$$

$$i_p = \frac{V}{|Z|} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) \quad [7.11]$$

Observamos que la corriente tiene un módulo igual al de la tensión aplicada dividido por el módulo de la impedancia del circuito. Por su parte, su fase está atrasada a la de la tensión aplicada, ωt , en un ángulo φ , denominado ángulo de fase del circuito.

La expresión [7.9] corresponde a una excitación alterna con valor nulo en el origen. Si no fuera así, la expresión a considerar es:

$$v_e = V \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \quad [7.12]$$

ψ se llama fase inicial o ángulo de conexión. En este caso, el valor inicial de la excitación es $v_{e(0)} = V \operatorname{sen} \psi$

La fase inicial es irrelevante para el régimen permanente por sí solo, sin embargo es fundamental cuando se trata de la componente permanente de un régimen transitorio que se debe combinar con la componente homogénea.

El único efecto de la fase inicial ψ es desplazar el régimen permanente un ángulo ψ .

Entonces,

$$i_p = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi) \quad [7.13]$$

Para obtener las tensiones de régimen permanente con excitación alterna para el capacitor y para el inductor, utilizamos los resultados obtenidos para excitación exponencial, ecuaciones [7.6] y [7.7], haciendo $s = j\omega$.

No se incluyen las demostraciones porque son muy parecidas a la de la corriente. Sólo haremos la observación de que como diferencia con la ecuación de corriente [7.4], en la ecuación [7.6] de v_C aparece un factor $1/j\omega C$ que multiplica el módulo de la corriente por $1/\omega C$ y corre la fase en -90° , mientras que en la ecuación [7.7], de v_L , aparece un factor $j\omega L$ que multiplica el módulo de la corriente por ωL y corre la fase en 90° .

Las respectivas ecuaciones son las siguientes:

$$v_{Cp} = \frac{V}{|Z|} \frac{1}{\omega C} \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi - 90^\circ) \quad [7.14]$$

$$v_{Lp} = \frac{V}{|Z|} \omega L \cdot \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi + 90^\circ) \quad [7.15]$$

Diagrama fasorial

Para hacer el diagrama fasorial primero se dibuja la corriente (por ser común a todos los elementos) y luego, tomándola como referencia, se ubican las tensiones ($\vec{V}_R$, de módulo IR , en fase; $\vec{V}_L$, de módulo $I\omega L$, adelantada 90° y $\vec{V}_C$, de módulo $I/\omega C$, atrasada 90°).

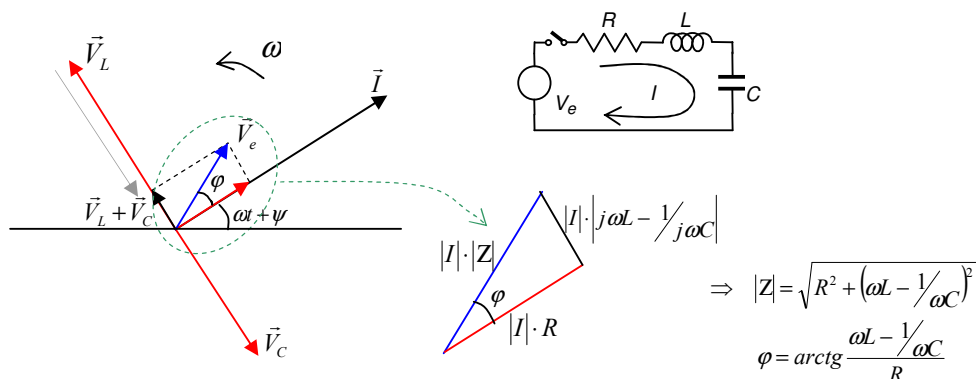


FIG.7.3 DIAGRAMA FASORIAL DEL CIRCUITO R-L-C SERIE

La tensión de entrada se obtiene como la suma de las tres anteriores, y el ángulo φ que forma con la corriente es el llamado ángulo de fase del circuito.

Del triángulo de tensiones, dividiendo sus lados por el módulo de la corriente, podemos deducir las ecuaciones de la impedancia y del ángulo de fase en función de los parámetros del circuito.

Como los fasores de $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$ son opuestos, la parte reactiva de la tensión es la resta de sus módulos. Por ello, la tensión en un elemento puede ser mayor que la tensión aplicada al circuito. Por ejemplo, en la figura los módulos de $\vec{V}_C$ y $\vec{V}_L$ superan el de la tensión de entrada.

El circuito R-L-C puede considerarse un modelo muy simplificado de una línea de transporte de energía; en un extremo está el generador que proporciona la tensión de entrada, y en el otro, donde se conecta la carga, está la capacidad de la línea con respecto a tierra o al neutro del generador. Como vimos, el módulo de la tensión en el capacitor, es decir en el lado de la carga, puede superar al módulo de la tensión del generador. En un caso real, esto se produce en líneas largas, cuya capacidad es importante cuando funcionan en vacío o con baja carga.

Cuando los módulos de $\vec{V}_L$ y $\vec{V}_C$ son iguales se dice que el circuito está en resonancia, y se comporta como resistivo puro.

8. Circuitos y excitaciones específicas

8.1 Circuitos R-L y R-C con excitación continua.

En este punto (excitación continua) y el siguiente (excitación alterna) aplicaremos la solución general [6.9] de los circuitos R-L y R-C para obtener las corrientes y las tensiones de cada uno de ellos.

Circuito R-L

Reemplazamos en la solución general la constante de tiempo correspondiente al circuito R-L, $\tau = L/R$

$$x = x_p + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.1]$$

Para obtener la corriente hacemos $x = i$

$$i = i_p + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.2]$$

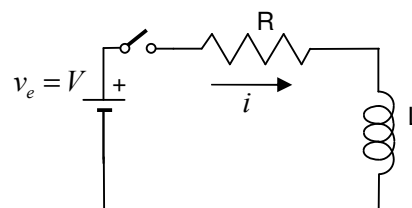


FIG.8.1 CIRCUITO R-L EN C.C

En régimen permanente el inductor es un cortocircuito, entonces: $i_p = \frac{V}{R}$

Para hallar la constante A consideramos que en $t = 0$ la corriente $i = i_{(0)}$:

$$i_{(0)} = \frac{V}{R} + A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot 0} \Rightarrow A = i_{(0)} - \frac{V}{R}$$

Entonces:

$$i = \frac{V}{R} + \left(i_{(0)} - \frac{V}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.3]$$

En particular, si la corriente inicial es nula:

$$i = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad [8.4]$$

Para obtener la tensión en el inductor aplicamos $v_L = L \frac{di}{dt}$ a [8.3], resultando:

$$v_L = \left(V - i_{(0)} \cdot R \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.5]$$

Y si la corriente inicial es nula: $v_L = V \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.6]$

También se puede obtener v_L restando de la tensión de la fuente, la caída en el resistor. A continuación lo hacemos para corriente inicial nula.

$$v_L = V - i \cdot R = V - \frac{V}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \cdot R = V \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

En las ecuaciones precedentes podemos verificar los valores inicial y final de cada variable:

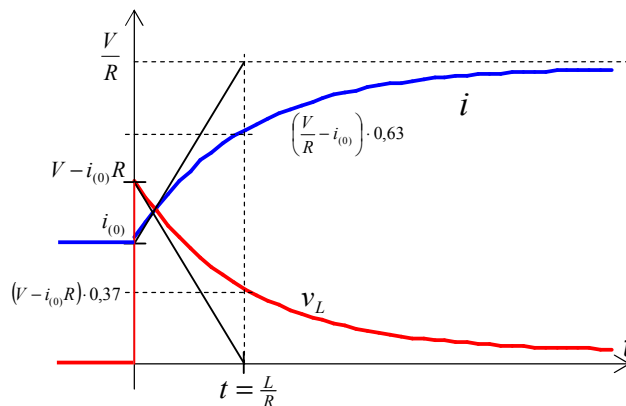


FIG. 8.2 RESPUESTA R-L EN C.C

En $t=\infty$, con independencia de las condiciones iniciales, el inductor se comporta como un cortocircuito, con lo que la corriente tiende a V/R y la tensión a cero.

En $t=0^+$ la corriente mantiene el valor de $t=0^-$, mientras que la tensión en el inductor, sin que importe su valor en $t=0^-$, es la tensión de fuente menos la caída en la resistencia.

Para $t = \tau$ ambas curvas han recorrido un 63% del salto entre su valor inicial y final, o dicho de otro modo, aún les falta recorrer un 37% para alcanzar el valor final. Los mencionados porcentajes surgen de aproximar $e^{-1} = 0,37$.

En cada curva, la recta que une los puntos:

$$[t=0, \text{valor inicial}] \quad \text{y} \quad [t=\tau, \text{valor final}]$$

es su tangente o pendiente en el origen.

En el Anexo A se muestra cómo se obtienen las curvas de tipo exponencial.

Circuito R-C

Reemplazamos en la solución general de los circuitos R-L y R-C, el valor de τ del circuito R-C, $\tau = R \cdot C$

$$x = x_p + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.7]$$

Y hacemos $x = v_C$

$$v_C = v_{Cp} + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.8]$$

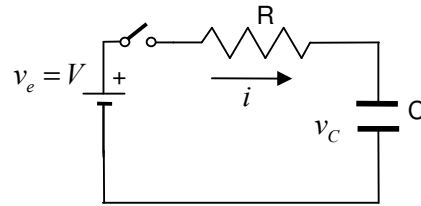


FIG. 8.3 CIRCUITO R-C EN C.C

En régimen permanente el capacitor es un circuito abierto, entonces: $v_{Cp} = V$

Para hallar la constante A consideramos que en $t = 0$ la tensión $v_C = v_{C(0)}$:

$$v_{C(0)} = V + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}0} \Rightarrow A = v_{C(0)} - V$$

Entonces:
$$v_C = V + (v_{C(0)} - V)e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.9]$$

Si la tensión inicial del capacitor es nula:
$$v_C = V \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad [8.10]$$

Para obtener la corriente aplicamos $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$, resultando:

$$i_C = \frac{1}{R} (V - v_{C(0)}) e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.11]$$

Y si la tensión inicial es nula:
$$i_C = \frac{V}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.12]$$

También se puede obtener la corriente como la tensión del resistor (que es igual a la tensión de la fuente menos la del capacitor) dividida por la resistencia.

$$i_C = \frac{V - v_C}{R} = \frac{V - V - (v_{C(0)} - V)e^{-\frac{1}{RC}t}}{R} = \frac{1}{R} (V - v_{C(0)}) e^{-\frac{1}{RC}t}$$

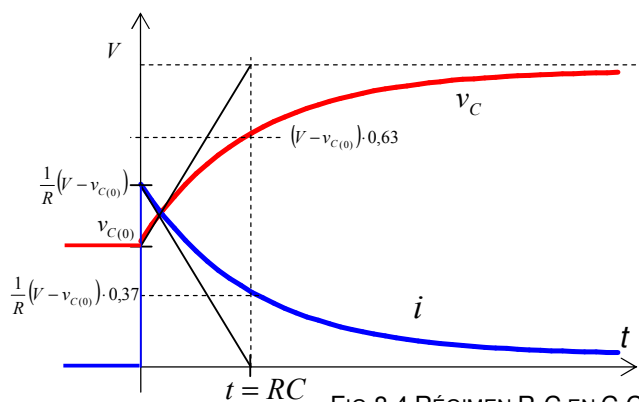


FIG.8.4 RÉGIMEN R-C EN C.C

En las ecuaciones precedentes podemos verificar los valores inicial y final de cada variable.

En $t = \infty$, sin importar las condiciones iniciales, el capacitor es como un circuito abierto, con lo que su tensión tiende a V y la corriente a cero.

En $t = 0^+$ la tensión del capacitor mantiene el valor de $t = 0^-$, y la corriente, sin

que importe su valor en $t=0^-$, es la tensión en el resistor (la de la fuente menos la del capacitor), dividida por la resistencia.

8.2 Circuitos R-L y R-C con excitación alterna.

El régimen transitorio con excitación alterna depende del ángulo de conexión o fase inicial de la excitación.

Siendo $v_e = V \text{sen}(\omega t + \psi)$

ψ es el ángulo de conexión,

V es el módulo o valor máximo y

el valor inicial es $v_{e(0)} = V \text{sen} \psi$

Si se conoce el valor inicial de la excitación, el ángulo de conexión se puede hallar con:

$$\psi = \arcsen \frac{v_{e(0)}}{V} \quad [8.13]$$

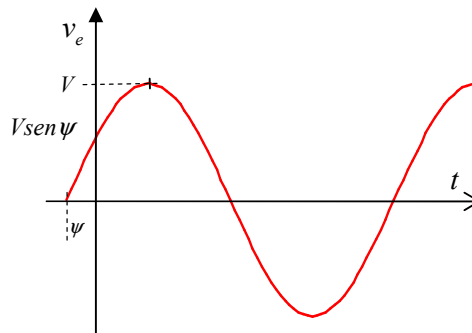


FIG.8.5 EXCITACIÓN ALTERNA

Veremos como influye el ángulo de conexión de la excitación en la respuesta del circuito.

Circuito R-L

La ecuación general para el cálculo de la corriente en el circuito R-L es la ya planteada en [8.1].

$$i = i_p + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Lo que cambia con diferentes excitaciones es la componente particular o de régimen permanente. En este caso, según vimos en 7.3,

$$i_p = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi)$$

Dónde $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ y $\varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$

Entonces:

$$i = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi) + A \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Para hallar la constante A aplicamos la condición inicial de corriente:

$$i_{(0)} = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\psi - \varphi) + A \Rightarrow A = i_{(0)} - \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\psi - \varphi)$$

Luego,
$$i = \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\omega t + \psi - \varphi) + \left[i_{(0)} - \frac{V}{|Z|} \text{sen}(\psi - \varphi) \right] \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \quad [8.14]$$

Para analizar la influencia del ángulo de conexión supondremos que la corriente inicial es nula, en cuyo caso queda:

$$i = \frac{V}{|Z|} \left[\sin(\omega t + \psi - \varphi) - \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad [8.15]$$

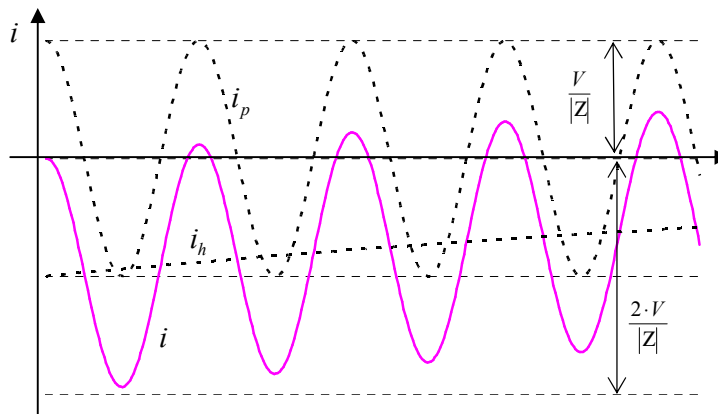
Se observa que según el valor del ángulo de conexión, el módulo de la función exponencial correspondiente a la componente homogénea puede valer desde cero hasta $V/|Z|$. Analicemos los casos extremos.

Si $\psi = \varphi \Rightarrow i = \frac{V}{|Z|} \sin \omega t$ ¡No hay transitorio! [8.16]

Si $\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$ ó $-\frac{\pi}{2}$

$$i = \frac{V}{|Z|} \left[\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) - e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad \text{ó} \quad i = \frac{V}{|Z|} \left[\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) + e^{-\frac{R}{L}t} \right] \quad [8.17]$$

Aquí sí hay transitorio y es bastante importante.



Para una constante de tiempo suficientemente grande el valor de la corriente puede ser casi el doble de su valor máximo en régimen permanente.

En la figura se representa el caso

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

FIG.8.6 CORRIENTE TRANSITORIA EN EL CIRCUITO R-L EN C.A

La tensión en el inductor es:

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di}{dt} = \frac{V}{|Z|} \omega L \cdot \cos(\omega t + \psi - \varphi) + \frac{V}{|Z|} R \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \\ &= \frac{V}{|Z|} \omega L \cdot \sin(\omega t + \psi - \varphi + \frac{\pi}{2}) + \frac{V}{|Z|} R \cdot \sin(\psi - \varphi) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \end{aligned}$$

Circuito R-C

El análisis es muy similar al circuito R-L por lo que lo abreviaremos. Se observa que existe gran simetría entre el comportamiento del circuito R-L con respecto a la corriente en el inductor y el del circuito R-C con respecto a la tensión en el capacitor.

$$v_c = v_{cp} + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$v_{cp} = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Dónde $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$ y $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\omega CR}$

Entonces:

$$v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

Para hallar la constante A aplicamos la condición inicial de v_c :

$$v_{c(0)} = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + A \Rightarrow A = v_{c(0)} - \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Luego,

$$v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \left[v_{c(0)} - \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen}\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad [8.18]$$

Consideremos que la tensión inicial del capacitor es nula:

$$v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \right] \quad [8.19]$$

Si $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t$ ¡No hay transitorio!

Si $\psi - \varphi = \pi$ ó $-\pi$

$$v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \left[\operatorname{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-\frac{1}{RC}t} \right] \quad \text{ó} \quad v_c = \frac{V}{|Z|} \cdot \frac{1}{\omega C} \left[\operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + e^{-\frac{1}{RC}t} \right] \quad [8.20]$$

Aquí sí hay transitorio y es bastante importante.

Estas ecuaciones son semejantes a las [8.17], de la corriente en el circuito R-L. Por lo tanto, extraemos una conclusión similar: el valor de la tensión en el

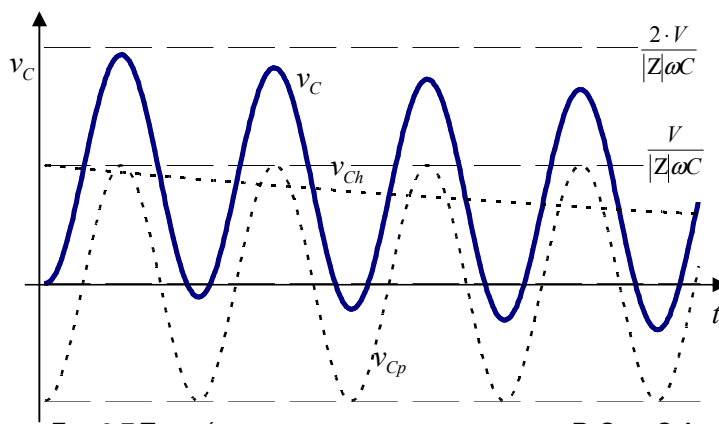


FIG. 8.7 TENSIÓN DEL CAPACITOR EN EL CIRCUITO R-C EN C.A

capacitor, para una constante de tiempo suficientemente grande, puede ser casi el doble de su valor máximo en el régimen permanente. La gráfica para el caso $\psi - \varphi = \pi$ es igual a la que hicimos antes para el circuito R-L. Aquí se representa la correspondiente al caso $\psi - \varphi = -\pi$ (que es igual a la del caso no dibujado para el circuito R-L)

A partir de [8.19] obtenemos la corriente:

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V}{|Z|} \cdot \cos(\omega t + \psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) + \frac{V}{|Z|\omega CR} \operatorname{sen}(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} =$$

$$= \frac{V}{|Z|} \left[\operatorname{sen}(\omega t + \psi - \varphi) + \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{sen}(\psi - \varphi - \frac{\pi}{2}) \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \right]$$

Se puede ver que si el circuito es muy capacitivo ($\varphi \rightarrow 90^\circ$), el factor $\operatorname{tg} \varphi$ es muy grande y por ello el valor inicial de la componente homogénea también lo es. Pero al mismo tiempo, como $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\omega C R} = -\frac{1}{\omega \tau}$, la constante de tiempo es pequeña, por lo que la componente homogénea se reduce rápidamente.

Consideraciones

Estas consideraciones se refieren no sólo a los circuitos R-L ó R-C sino a aquellos que se presentan aproximadamente como tales para la excitación. Tal sería el caso de un circuito como el de la figura, que no es estrictamente R-C, pero como la carga deriva una pequeña corriente, la excitación lo ve como tal.

Cuando la excitación es alterna, el transitorio depende del momento de conexión de la excitación alterna, pero a los efectos de dimensionar un circuito debemos pensar en el peor caso, que es aquel en el cual alguna de las variables toma valores superiores a los de régimen permanente. En el circuito R-L, la corriente puede llegar a duplicar el valor de régimen permanente, al igual que la tensión sobre el capacitor de un circuito R-C.

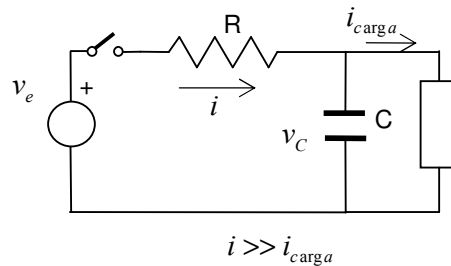


FIG.8.9 PSEUDO CIRCUITO R-C

Si ambos circuitos se diseñan considerando sólo el régimen permanente, la peor situación es la del circuito R-C, porque un pico de tensión que supere la capacidad de aislamiento del capacitor es suficiente para provocar su destrucción, en tanto que el inductor puede soportar un exceso de corriente por algún tiempo sin que se alcance a producir un calentamiento como para dañarlo. Cabe señalar que no nos referimos a un calentamiento tal que llegue a fundir los conductores, sino a uno mucho menor pero suficiente para dañar la aislación entre espiras, muchas veces consistente en una fina capa de barniz.

8.3 Circuito R-L-C con excitación continua.

Si bien deduciremos las ecuaciones de cada variable en función del tiempo, para distintos tipos de respuesta (aperiódica y periódica), lo importante de este punto es la interpretación de las curvas correspondientes a cada variable y la relación entre ellas mediante el análisis conceptual que se hace más adelante.

Supondremos que antes de conectar la fuente que excita el circuito, este está abierto, por lo que la corriente es nula. En cambio consideraremos que el capacitor tiene cierta carga. Esto cubre casi todos los casos que se presentan en la práctica.

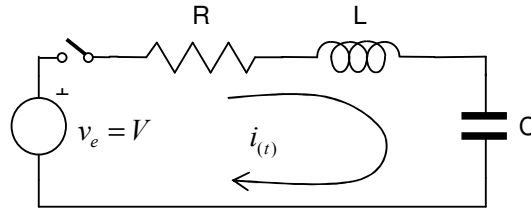


FIG.8.10 CIRCUITO R-L-C. EXCITACIÓN CONTÍNUA

Caso aperiódico

Lo más conveniente es comenzar a resolver el régimen transitorio del circuito R-L-C a partir de tensión en el capacitor; luego, con derivadas sucesivas podemos obtener la corriente y la tensión en el inductor.

Con excitación continua, el capacitor en régimen permanente se comporta como un circuito abierto, por lo tanto, su tensión es igual a la de la fuente y la corriente del circuito es nula. Entonces, la solución general de la tensión en el capacitor, para el caso aperiódico es:

$$v_C = V + A_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad [8.21]$$

Aplicamos la condición inicial: $v_{C(0)} = V + A_1 + A_2$

Obtenemos la ecuación general de la corriente a partir de [8.21]:

$$i = C \frac{dv_C}{dt} = C \cdot (A_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + A_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.22]$$

Aplicamos la condición inicial $i_{(0)} = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2$

Hemos obtenido un par de ecuaciones con dos incógnitas, A_1 y A_2 .

$$\begin{cases} v_{C(0)} - V = A_1 + A_2 \\ 0 = \lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = -\frac{\lambda_2 (v_{C(0)} - V)}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad A_2 = \frac{\lambda_1 (v_{C(0)} - V)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Reemplazamos en [8.21]:

$$v_C = V + \frac{(v_{C(0)} - V)}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.23]$$

Derivando sucesivamente:

$$i = C \frac{dv_C}{dt} = C \frac{(v_{C(0)} - V)}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.24]$$

y

$$v_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{(v_{C(0)} - V)}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 \lambda_1^2 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_1 \lambda_2^2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.25]$$

Con estas ecuaciones podemos estudiar dos casos de interés:

- Excitación de una malla R-L-C en reposo, haciendo $v_{C(0)} = 0$.
- Descarga de un capacitor a través de una malla R-L-C, haciendo $V = 0$.

Excitación de la malla R-L-C

En la siguiente figura se muestra la evolución temporal de las variables en el primer caso. En lugar de la corriente se ha graficado la tensión en el resistor

(que es proporcional a ella), para uniformar unidades y poder comprobar que en todo momento, la suma de las tres tensiones es igual a la tensión aplicada.

Haciendo $v_{C(0)} = 0$ y llamando:

$$K = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

podemos escribir las ecuaciones de las tensiones en forma más compacta:

$$v_C = V + VK \left[\frac{e^{\lambda_1 \cdot t}}{\lambda_1} - \frac{e^{\lambda_2 \cdot t}}{\lambda_2} \right] \quad [8.27]$$

$$v_R = VRCK (e^{\lambda_1 \cdot t} - e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.28]$$

$$v_L = VLCK (\lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}) \quad [8.29]$$

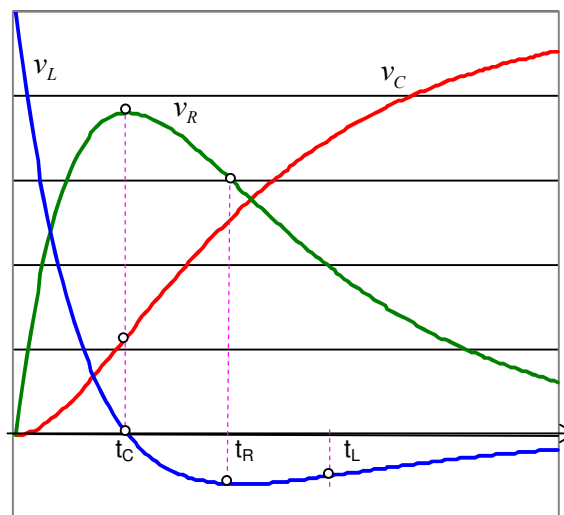


FIG.8.11 RESPUESTA APERIÓDICA – EXCITACIÓN DEL CIRCUITO R-L-C.

Análisis conceptual

Este análisis considera:

- 1) Valor inicial y final (régimen permanente) de cada variable.
- 2) Relaciones que surgen cuando una variable es derivada o derivada segunda de otra.
- 3) Conceptos físicos o eléctricos

Los valores iniciales de la corriente y la tensión en el capacitor están determinados por las Leyes de la Conmutación. Si las condiciones iniciales son nulas (entendemos por condiciones iniciales los valores de las variables antes de conectar la excitación), esas leyes nos dicen que la corriente del circuito, que es la del inductor, y la tensión en el capacitor, son cero en el instante inmediato a la aplicación de la excitación. Se observa que las curvas de v_R y v_C arrancan de cero.

Aplicando la 2ª Ley de Kirchhoff deducimos que en ese instante toda la tensión de la excitación queda aplicada sobre el inductor. Podemos dar aquí una explicación adicional: como el inductor procura mantener el valor de corriente en cero, produce una tensión igual y opuesta a la fuente. Naturalmente esto es en el instante inicial, ya que la fuente vence la inercia del inductor y la corriente comienza a crecer.

Matemáticamente podemos establecer que la pendiente con que arranca la curva de tensión del capacitor es cero, ya que en el instante inicial, el valor de su derivada, que es la corriente, es cero. En un análisis más cercano al hecho eléctrico podemos decir que como la corriente comienza a crecer desde cero, sus valores iniciales son bajos y por ello el aporte de cargas al capacitor, y por ende su tensión, comienzan a crecer lentamente. Pero luego, a medida que la corriente toma valores mayores, la tensión del capacitor aumenta más rápidamente.

Los valores finales de las curvas son los de su régimen permanente. Ya hemos visto que la tensión en el capacitor alcanza el valor de la tensión de la fuente y que la corriente es nula. Y como toda la tensión aplicada cae en el capacitor, la tensión en el inductor es nula.

Vimos que la corriente parte de cero y termina valiendo cero. Naturalmente en algún momento toma su valor máximo. En ese momento es cuando el flujo de cargas hacia el capacitor es mayor y por ello, es mayor la velocidad de crecimiento de su tensión. Pero en ese instante, la tensión del capacitor ha alcanzado nivel tal que la diferencia de potencial entre la fuente y el capacitor se ha reducido como para que la corriente no pueda crecer más. La curva de tensión del capacitor tiene un punto de inflexión; a partir de allí la corriente baja y la velocidad de crecimiento de esa tensión baja. Matemáticamente podemos decir que cuando una curva creciente tiene un punto de inflexión, su derivada (la corriente) tiene un máximo y la derivada segunda (la tensión en el inductor) es cero.

Pasado el valor máximo de la corriente, su disminución será más suave cuanto mayor sea el inductor, ya que este se opone a las variaciones de corriente. Mientras la corriente crece el inductor almacena energía y cuando la corriente empieza a disminuir, la devuelve al circuito. Obsérvese que en ese momento, la tensión del inductor cambia su polaridad. De oponerse a la fuente, pasa a colaborar con ella.

Puntos destacados

Las tres curvas presentan puntos de inflexión, coincidentes con el máximo/mínimo de su derivada y un cero de su derivada segunda.

Así, el punto de inflexión de v_C coincide con el máximo de i y el cero de v_L en el siguiente instante:

$$t_C = \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad [8.30]$$

Para el punto de inflexión de i o v_R , coincidente con el mínimo de v_L , se obtiene:

$$t_R = \frac{2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad [8.31]$$

Y el punto de inflexión de v_L :

$$t_L = \frac{3}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad [8.32]$$

Vemos que estos tres puntos de tiempo son equidistantes.

Los puntos destacados que hemos mencionado están indicados en la figura precedente.

Descarga de la malla

Este es el caso en que el capacitor está cargado (seguramente por acción de una fuente que ya se ha retirado) y se cierra el circuito de manera que se descarga a través del resistor y el inductor. Para su estudio, en las ecuaciones [8.23], [8.24] y [8.25] mantenemos $v_{C(0)} \neq 0$ y hacemos $V = 0$.

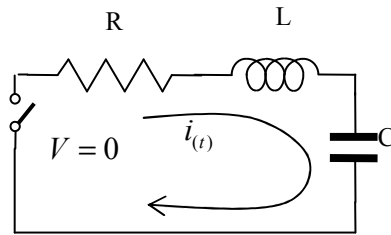


FIG.8.12 DESCARGA DE MALLA R-L-C

De tal manera, las ecuaciones se transforman en las siguientes:

$$v_C = v_{C(0)} \left[\frac{K}{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_1 t} + \frac{K}{\lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 t} \right] \quad [8.33]$$

$$v_R = -v_{C(0)} RC (K \cdot e^{\lambda_1 t} + K \cdot e^{\lambda_2 t}) \quad [8.34]$$

$$v_L = -v_{C(0)} LC (K \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) \quad [8.35]$$

El análisis conceptual es muy semejante al realizado para el caso anterior.

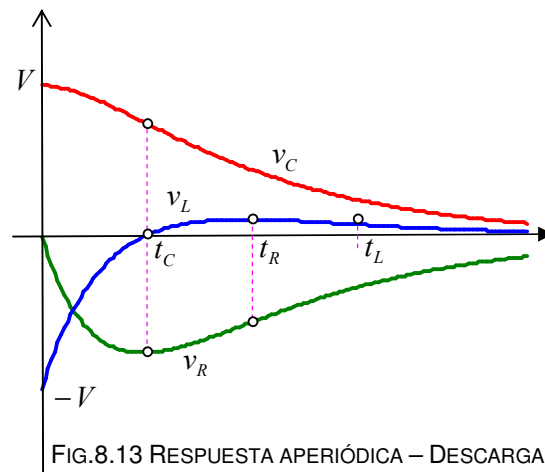


FIG.8.13 RESPUESTA APERIÓDICA – DESCARGA DEL CIRCUITO R-L-C.

Caso periódico

Comenzamos planteando la solución general para la tensión en el capacitor, ya que una vez determinadas las constantes A_1 y A_2 , en base a las condiciones iniciales, la corriente y la tensión en el inductor se pueden obtener derivando una y dos veces respectivamente la expresión de v_C .

$$v_C = V + e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) \quad [8.36]$$

Normalmente en los casos reales se parte de un circuito abierto o que se comporta como tal, en el cual la corriente inicial es nula, pero la tensión en el capacitor puede tener un valor distinto de cero. En consecuencia, tomaremos como condiciones iniciales $i_{(0)} = 0$ y $v_{C(0)} \neq 0$, las que nos permitirán analizar la energización del circuito y la descarga del capacitor.

En $t=0$ $v_{C(0)} = V + e^{-\alpha \cdot 0} (A_1 \cos 0 + A_2 \sin 0) = V + A_1 \Rightarrow A_1 = v_{C(0)} - V$

Reemplazando esta constante:

$$v_C = V + e^{-\alpha t} [(v_{C(0)} - V) \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t]$$

Para aplicar la otra condición inicial hay que obtener la corriente.

$$i_{(0)} = C \frac{dv_C}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow \frac{dv_C}{dt} \Big|_{t=0} = 0$$

Primero derivamos:

$$i = \frac{dv_C}{dt} = -\alpha \cdot e^{-\alpha t} [(v_{C(0)} - V) \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t] + e^{-\alpha t} [-\omega_n (v_{C(0)} - V) \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t]$$

y luego igualamos a 0 con $t=0$

$$0 = -\alpha (v_{C(0)} - V) + A_2 \omega_n \Rightarrow A_2 = \frac{\alpha}{\omega_n} (v_{C(0)} - V)$$

Entonces,
$$v_C = V + e^{-\alpha t} (v_{C(0)} - V) \left[\cos \omega_n t + \frac{\alpha}{\omega_n} \sin \omega_n t \right]$$

Podemos reemplazar los dos términos armónicos por uno:

$$v_C = V + (v_{C(0)} - V) M \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_n t + \psi)$$

$$M = \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{\omega_n}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega_n^2 + \alpha^2}}{\omega_n} = \frac{\omega_r}{\omega_n} \rightarrow \text{ver [6.27]} \quad \psi = \arctg \frac{\omega_n}{\alpha}$$

$$v_C = V + (v_{C(0)} - V) \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \sin(\omega_n t + \psi) \quad [8.37]$$

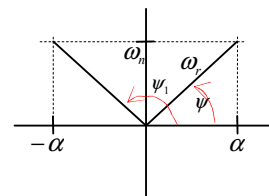
Esto facilita las derivadas que nos llevan a las ecuaciones de i y de v_L . Así:

$$i = C \frac{dv_C}{dt} = C (v_{C(0)} - V) \frac{\omega_r}{\omega_n} [-\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_n t + \psi) + e^{-\alpha t} \cdot \omega_n \cdot \cos(\omega_n t + \psi)]$$

Llevamos nuevamente a un único término armónico.

$$i = C (v_{C(0)} - V) \frac{\omega_r}{\omega_n} \cdot M_1 \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_n t + \psi + \psi_1)$$

dónde
$$M_1 = \sqrt{\omega_n^2 + \alpha^2} = \omega_r \quad \psi_1 = \arctg \frac{\omega_n}{-\alpha}$$



Nótese que $\psi + \psi_1 = \pi$

Y como $\omega_r^2 = 1/LC$ y $\sin(\omega_n t + \pi) = -\sin \omega_n t$

$$\Rightarrow i = \frac{(V - v_{C(0)})}{\omega_n L} e^{-\alpha t} \sin \omega_n t \quad [8.38]$$

Ahora hacemos
$$v_L = L \frac{di}{dt} = \frac{(V - v_{C(0)})}{\omega_n} (-\alpha \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega_n t + \omega_n \cdot e^{-\alpha t} \cos \omega_n t)$$

Y para uniformar los resultados, llevamos a un solo término armónico:

$$v_L = \frac{(V - v_{C(0)})}{\omega_n} M_2 \cdot e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi_2)$$

Siendo $M_2 = \sqrt{\omega_n^2 + \alpha^2} = \omega_r$ $\psi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\omega_n}{-\alpha} = \psi_1 = \pi - \psi$

$$\Rightarrow v_L = (V - v_{C(0)}) \frac{\omega_r}{\omega_n} \cdot e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \pi - \psi) = -(V - v_{C(0)}) \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t - \psi) \quad [8.39]$$

Energización del circuito R-L-C

Las ecuaciones que describen la energización del circuito a partir de condiciones iniciales nulas se desprenden de [8.37], [8.38] y [8.39] haciendo $v_{C(0)} = 0$.

Resultan:

$$v_C = V - V \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi)$$

$$i = \frac{V}{\omega_n L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$v_L = -V \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t - \psi)$$

Para verificar los valores en el origen se debe tener en cuenta que $\operatorname{sen} \psi = \omega_n / \omega_r$.

Ver el triángulo que relaciona ω_r , ω_n y α .

Una característica del régimen periódico o subamortiguado es el pico de la tensión del capacitor, llamado sobrevalor porque excede la tensión de la fuente. Se produce cuando $\omega_n t + \psi = \pi / 2$,

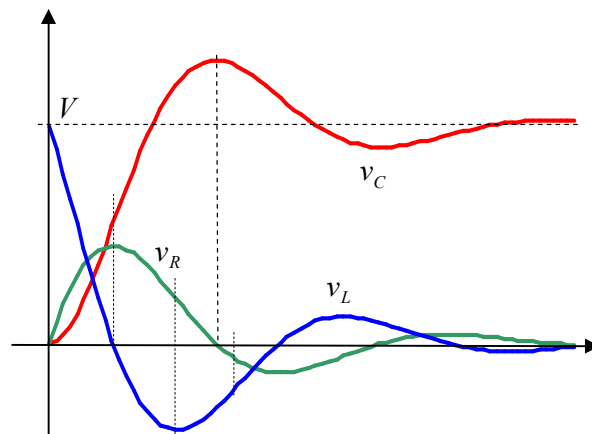


FIG.8.14 RESPUESTA PERIÓDICA – CARGA DE UN CAPACITOR EN UN CIRCUITO R-L-C.

Descarga del circuito R-L-C

Para obtener las ecuaciones correspondientes a la descarga hacemos $V = 0$.

$$v_C = v_{C(0)} \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \psi)$$

$$i = -\frac{v_{C(0)}}{\omega_n L} e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_n t$$

$$v_L = v_{C(0)} \frac{\omega_r}{\omega_n} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t - \psi)$$

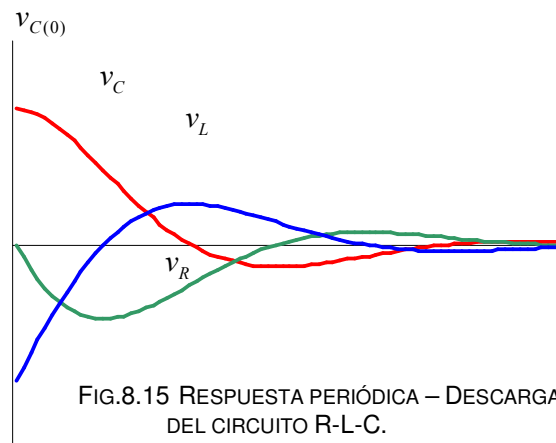


FIG.8.15 RESPUESTA PERIÓDICA – DESCARGA DEL CIRCUITO R-L-C.

Caso Crítico

El régimen crítico es el límite del aperiódico cuando $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$.

Las curvas del régimen crítico son semejantes a las de un régimen aperiódico en el que las raíces del polinomio característico tienen valores próximos. Por ese motivo no se presentan aquí, dejando como ejercicio la obtención de las ecuaciones de i , v_L y v_C .

8.4 Circuito R-L-C con excitación alterna

No haremos un análisis demasiado minucioso del circuito R-L-C en corriente alterna debido a que las conclusiones que podríamos obtener no lo ameritan.

Caso aperiódico

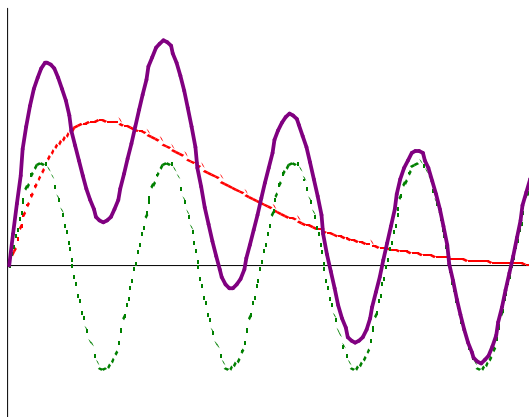
Ya conocemos las expresiones de la componente de régimen permanente en C.A y la componente libre aperiódica. Recordemos que ésta última no depende de la excitación sino sólo de los parámetros del circuito, y que introduce dos constantes cuyo valor depende de las condiciones iniciales.

Es conveniente comenzar con el planteo de la expresión de v_C ya que por derivaciones sucesivas es sencillo obtener la de i y luego la de v_L .

$$v_c = \underbrace{\frac{V}{\omega C Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}_{\text{comp. permanente}} + \underbrace{A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}}_{\substack{\text{comp.} \\ \text{libre}}}$$

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + A_1' e^{\lambda_1 t} + A_2' e^{\lambda_2 t}$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \frac{V \omega L}{Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_1'' e^{\lambda_1 t} + A_2'' \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$



La figura muestra una evolución típica de estas variables, donde para que sea más visible el fenómeno transitorio, se representa una componente permanente cuyo período es comparable con las constantes de tiempo que determinan la componente libre aperiódica.

FIG.8.16 EXCITACIÓN ALTERNA.
RESPUESTA APERIÓDICA

Caso periódico

La componente de régimen permanente es la misma que en el caso aperiódico, lo que cambia es la componente libre.

$$v_c = \frac{V}{\omega C Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + e^{-\alpha t} (A_1 \operatorname{sen} \omega_n t + A_2 \cos \omega_n t)$$

La componente libre se puede escribir como una sola función armónica a fin de generar menor cantidad de términos al derivar:

$$v_c = \frac{V}{\omega C Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + M e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \chi)$$

En esta conversión:

$$M = \sqrt{\operatorname{coef}.\operatorname{seno}^2 + \operatorname{coef}.\operatorname{coseno}^2} \quad \chi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{coef}.\operatorname{coseno}}{\operatorname{coef}.\operatorname{seno}}$$

Luego,

$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + C M e^{-\alpha t} [-\alpha \operatorname{sen}(\omega_n t + \chi) + \omega_n \cos(\omega_n t + \chi)]$$

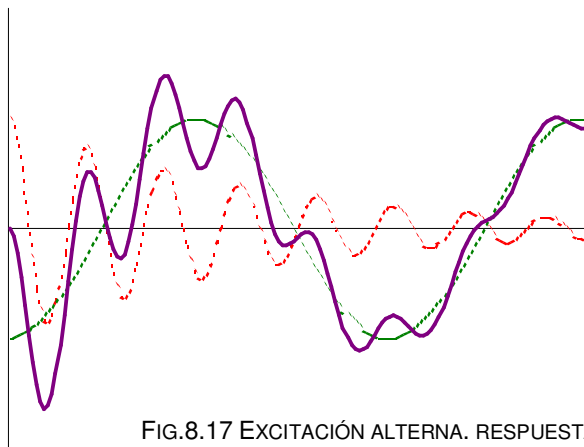
$$i = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{V}{Z} \operatorname{sen}(\omega t - \varphi) + M_1 e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \chi_1)$$

Y finalmente,

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \frac{V \omega L}{Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + L M_1 e^{-\alpha t} [-\alpha \operatorname{sen}(\omega_n t + \chi_1) + \omega_n \cos(\omega_n t + \chi_1)]$$

$$v_L = L \frac{di}{dt} = \frac{V \omega L}{Z} \operatorname{sen}\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + M_2 e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_n t + \chi_2)$$

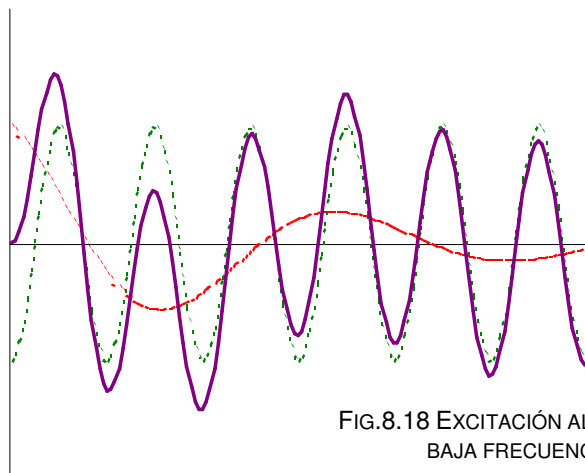
La forma en que evolucionan estas variables dependerá de la relación entre la frecuencia de régimen permanente ω y la frecuencia natural ω_n .



En esta figura la frecuencia natural es mayor que la de régimen permanente.

La componente libre oscila "montada" sobre la componente permanente a medida que se atenúa.

FIG.8.17 EXCITACIÓN ALTERNA. RESPUESTA PERIÓDICA DE ALTA FRECUENCIA



En este otro caso, la frecuencia permanente es mayor que la natural.

Oscila montada en la componente libre. A medida que esta última se atenúa, la componente permanente queda oscilando sobre el eje de abscisas

FIG.8.18 EXCITACIÓN ALTERNA. RESPUESTA PERIÓDICA DE BAJA FRECUENCIA

9. Recursos adicionales.

En este punto se presenta un par de recursos que nos permiten aplicar el método clásico cuando se aplican excitaciones cuyo régimen permanente no hemos estudiado.

9.1 Excitación con la derivada o la integral

Derivada

La ecuación [6.11], de la cual nace el análisis circuito R-L-C serie, relaciona la excitación del circuito con las caídas de tensión en los componentes pasivos, expresadas en función de la corriente.

$$v_e = R \cdot i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i \cdot dt \quad [6.11]$$

La propiedad de linealidad de la derivada y la integral permite derivar ambos miembros preservando la igualdad.

$$\frac{dv_e}{dt} = R \cdot \frac{di}{dt} + L \frac{d}{dt} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t \frac{di}{dt} \cdot dt$$

Para compactar la escritura llamamos $\frac{dv_e}{dt} = v_e'$ y $\frac{di}{dt} = i'$

$$v_e' = R \cdot i' + L \frac{di'}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i' \cdot dt \quad [9.1]$$

Las expresiones [6.11] y [9.1], independientemente del nombre simbólico de las variables, son iguales. Entonces, si para una excitación v_e resulta una corriente i , cuando se excita con una tensión igual a la derivada de v_e , la corriente es la derivada de i .

La conclusión es la misma si repetimos el análisis partiendo de las ecuaciones que relacionan excitación con tensión en el inductor o con tensión en el capacitor.

De un modo generalizado podemos decir que si a una excitación corresponde determinada respuesta (sea i , v_L o v_C), a la derivada de dicha excitación corresponde la derivada de esa respuesta.

Esta propiedad tiene utilidad práctica cuando es más simple resolver el circuito para la derivada de la excitación que para la excitación misma. Si se hace así, se obtendrá la derivada de la corriente que corresponde a la excitación dada. Entonces habrá que integrar ese resultado para obtener la corriente.

Ejemplo.

Consideremos un circuito R-C excitado con una rampa lineal como muestra la figura. Se desea obtener la tensión en el capacitor.

La función que describe la excitación es:

$$v_e = \frac{V}{t_1} t = 100 \cdot m \quad \text{donde} \quad m = \frac{V}{t_1}$$

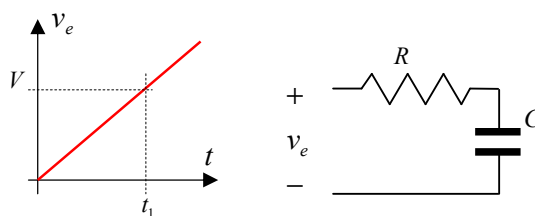


FIG.9.1 CIRCUITO R-C EXCITADO CON UNA RAMPA

Nuestro problema es que no conocemos el régimen permanente para tal excitación. Entonces resolvemos para una excitación igual a la derivada de esa excitación, que es continua: $v_e' = V$.

Sabemos que
$$v_C' = V \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \text{con} \quad \tau = R C$$

$$\Rightarrow v_C = V \int \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt = V \cdot t + V \cdot \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + k$$

Para hallar la constante de integración, a falta de otra indicación suponemos condiciones iniciales nulas.

$$\Rightarrow 0 = V \cdot \tau + k \Rightarrow k = -V \cdot \tau \quad \therefore v_C = V \cdot t - V \cdot \tau + V \cdot \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos el régimen permanente:

$$v_{Cp} = V \cdot t - V \cdot \tau$$

El término restante es la componente homogénea, que como podemos comprobar coincide con lo que hemos deducido para el circuito R-C.

$$v_{Ch} = V \cdot \tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

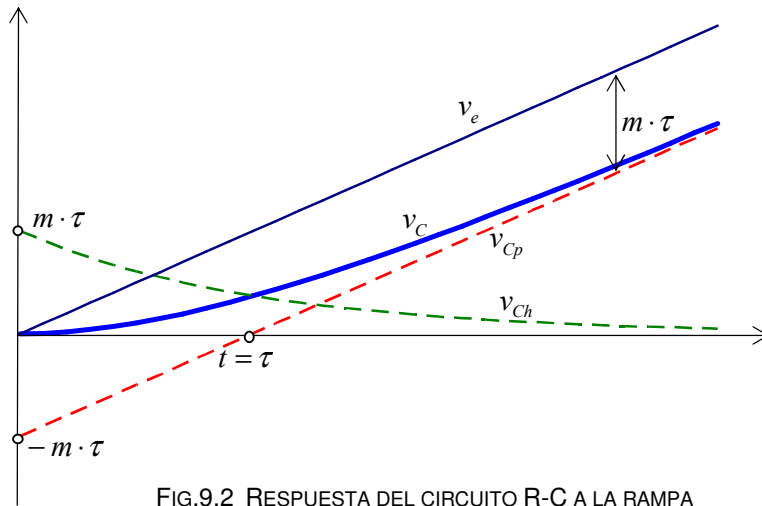


FIG.9.2 RESPUESTA DEL CIRCUITO R-C A LA RAMPA

La figura muestra la excitación v_e y la respuesta v_C (con sus componentes permanente y homogénea).

Vemos que después de una inercia inicial, la tensión en el capacitor iguala la velocidad de crecimiento de la excitación. Pero esa inercia inicial hace que quede con un valor permanente $m \cdot \tau$ por debajo.

Integral

Lo que hemos demostrado para la derivada de la excitación se puede demostrar de manera similar para la integral de la excitación.

Se puede aplicar para resolver el caso de excitación impulso, cuya integral es un escalón (equivalente a excitación continua). La respuesta obtenida es la integral de la que corresponde a la excitación impulso, por lo tanto habrá que derivarla para hallar la respuesta al impulso.

9.2 Superposición

No nos extenderemos demasiado en este punto, ya que sólo se trata de señalar la validez del Teorema de Superposición en circuitos lineales. Cuando la excitación está compuesta por la superposición de funciones básicas, se puede estudiar la respuesta para cada componente. Luego, la respuesta a dicha excitación es suma de los resultados obtenidos para cada componente.

10. Circuitos mallados

Hasta ahora nos restringimos a circuitos de una malla. El de la figura es un circuito muy simple, pero por tener dos mallas genera un sistema de ecuaciones diferenciales que complica el empleo del método clásico.

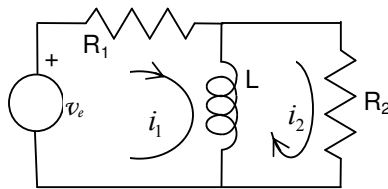


FIG.10.1 CIRCUITO DE 2 MALLAS

Para las corrientes de malla indicadas en la figura, las ecuaciones son:

$$\begin{cases} v_e = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} - L \frac{di_2}{dt} & (a) \\ 0 = -L \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} & (b) \end{cases} \quad [10.1]$$

Es evidente que hay que ser muy cuidadoso al elegir las mallas, ya que una buena elección puede facilitar la resolución. En este caso, seguramente hubiera sido conveniente que una de las mallas fuera la que recorre la fuente y ambas resistencias, pues hubiéramos tenido una ecuación no diferencial.

De todos modos, dadas las ecuaciones anteriores, podemos sumarlas entre sí con lo que eliminamos los diferenciales. Luego nos quedamos con la ecuación sin diferenciales y cualquiera de las originales. Entonces el sistema se simplifica:

$$\begin{cases} v_e = R_1 i_1 + R_2 i_2 & \leftarrow \text{suma de (a) y (b)} \\ 0 = -L \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} \end{cases} \quad [10.2]$$

Podemos despejar una incógnita de la primera ecuación y reemplazarla en la segunda.

Por ejemplo:
$$i_1 = \frac{v_e - R_2 i_2}{R_1} \quad [10.3]$$

Luego:
$$0 = -\frac{L}{R_1} \frac{dv_e}{dt} + L \frac{R_2}{R_1} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + L \frac{di_2}{dt} \quad [10.4]$$

$$\frac{L}{R_1} \frac{dv_e}{dt} = +L \frac{(R_2 + R_1)}{R_1} \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 \quad [10.5]$$

Hemos logrado una ecuación de primer orden con una incógnita, similar a las que hemos resuelto anteriormente. De allí podemos obtener i_2 y luego, de la ecuación [10.3], i_1 .

La resolución de este problema pudo parecer sencilla, y en realidad lo fue; en parte debido a que pudimos llegar a un sistema con una única ecuación diferencial y por otra parte, porque el circuito tenía un único elemento que introduce diferenciales: el inductor.

Se invita al lector a que intente la resolución del circuito anterior sustituyendo R_1 por un capacitor, o si no quiere complicarse demasiado, por otro inductor. No importa demasiado si puede o no resolverlo sino que experimente las dificultades que se presentan.

Veremos a continuación que mediante el empleo de la Transformada de Laplace, las ecuaciones diferenciales se transforman en algebraicas, o sea que el sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente a un circuito mallado se puede transformar en un sistema de ecuaciones algebraicas.

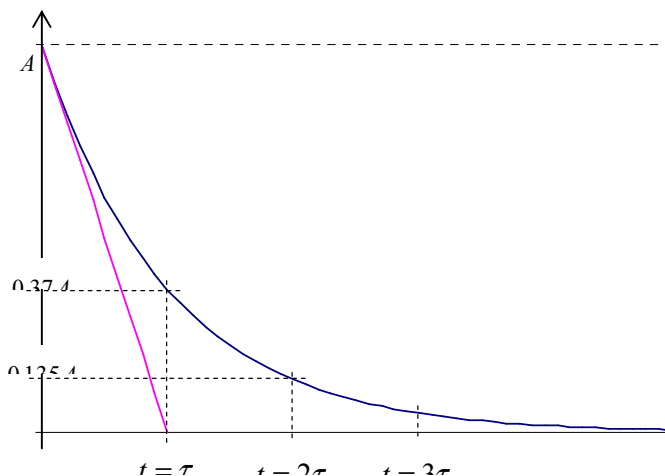
ANEXO A - Gráficas de funciones típicas

1. Exponenciales

1.1 Decreciente $f_{(t)} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

TABLA DE VALORES

t	$f_{(t)}$
0	A
τ	$0,37A$
2τ	$0,135A$
3τ	$0,05A$
5τ	$< 0,01A$



La recta que une el punto $(0, A)$ con $(\tau, 0)$ tiene una pendiente $-\frac{A}{\tau}$, que coincide

con la pendiente de la curva en el origen: $f'_{(t)} = -\frac{A}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow f'_{(0)} = -\frac{A}{\tau}$

Con sólo dibujar dicha recta, que nos da la pendiente con que arranca la curva, y ubicando el valor de la misma para $t = \tau$, podemos realizar un buen trazado.

Es interesante señalar que el valor de la curva, para $t = t_0 + \tau$ es un 37% del valor para $t = t_0$. Este decaimiento uniforme se llama decrecimiento logarítmico.

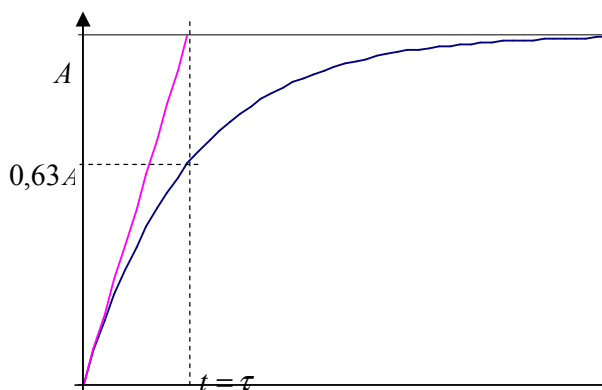
En efecto, $A \cdot e^{-\frac{t_0 + \tau}{\tau}} = A \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} e^{-1} = 0,37 \cdot e^{-\frac{t_0}{\tau}} \quad \forall t_0$

1.2 Creciente asintótica $f_{(t)} = A \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

Esta curva es la constante A menos la curva anterior.

En $t = \tau$ le resta un 37% para alcanzar su valor final, o bien ha llegado a un 63% del mismo.

La recta cuya pendiente es igual a la de la curva en el origen, parte del mismo origen y cruza la asíntota A en $t = \tau$.



1.3 Exponencial general $f(t) = K + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

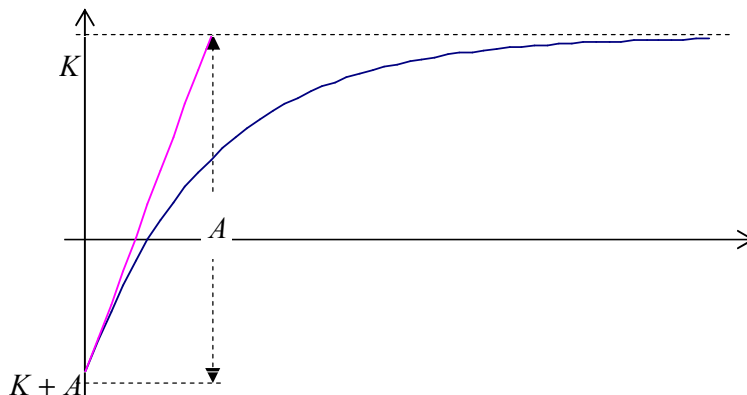
Esta es una generalización de las funciones exponenciales. Con valores apropiados de las constantes cubre los dos casos anteriores.

Los valores extremos son:

$$f_{(0)} = K + A$$

$$f_{(\infty)} = K$$

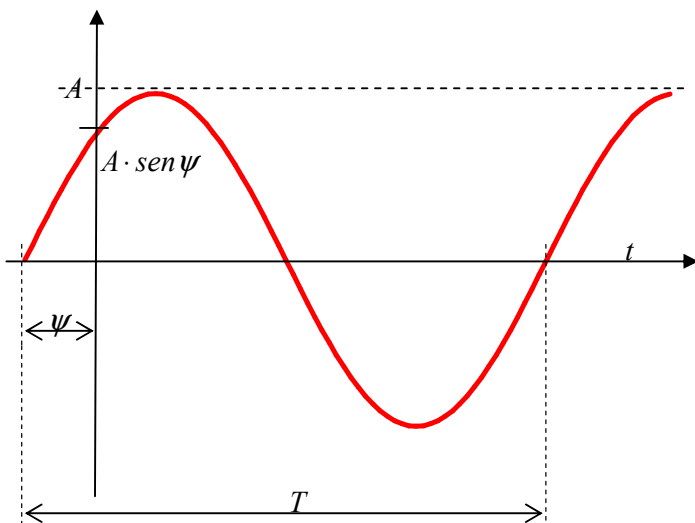
y la excursión entre el valor inicial y final es A . Para $t = \tau$ se ha recorrido un 63% de esa excursión o bien falta un 37% para llegar al valor asintótico.



La ordenada para $t = \tau$ vale $K + 0,37 \cdot A$

2. Armónicas o senoidales

2.1 Seno desplazado $f(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \psi)$



A es el valor máximo.

T es el período, definido como la diferencia de tiempo entre dos puntos contiguos de igual valor:

$$f_{(t)} = f_{(t+T)} \quad \forall t$$

La frecuencia f es la cantidad de períodos o ciclos en 1 segundo:

$$f = \frac{1}{T} \quad [\text{ciclos} / \text{seg}]$$

La pulsación angular ω es la cantidad de radianes en 1 seg. Como un ciclo o período abarca 2π :

Finalmente, ψ es la fase inicial (en $t=0$). Entonces el valor inicial de la función es $A \cdot \text{sen} \psi$. Dado ψ como ángulo, el correspondiente valor en segundos se puede obtener por regla de tres simple, considerando que $T \equiv 2\pi [\text{rad}] \equiv 360^\circ$.

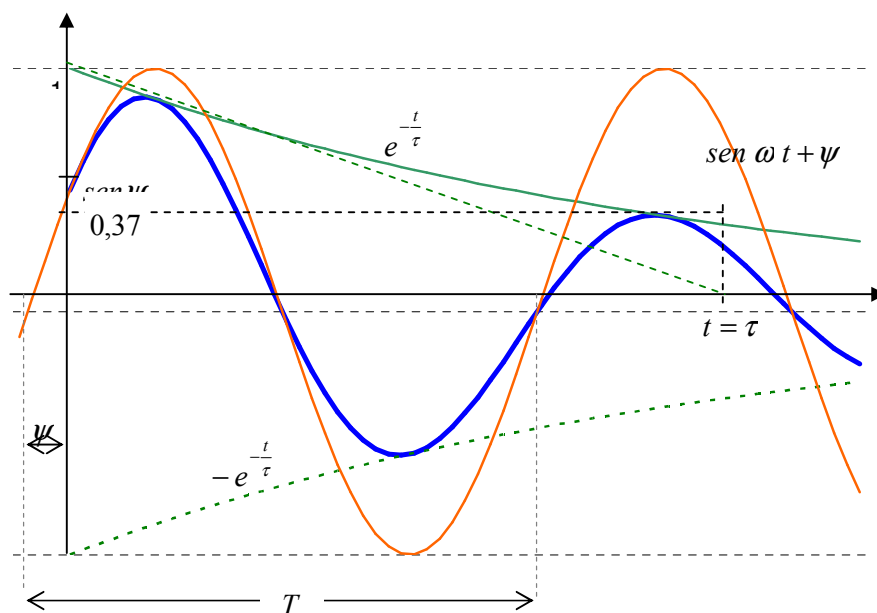
$$\Rightarrow \psi[\text{seg}] = T \frac{\psi[\text{rad}]}{2\pi} = T \frac{\psi[^\circ]}{360^\circ}$$

Para dibujar la senoide conviene seguir los siguientes pasos:

1. Se calcula el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$
2. Se traza la senoide de amplitud A
3. Se ubica el eje de ordenadas separado un ángulo ψ del inicio del semiciclo positivo. Hacia la derecha si ψ es positivo y hacia la izquierda si es negativo.
4. Se verifica que la ordenada en el origen sea $A \cdot \sin \psi$

2.2 Seno amortiguado $f(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \psi)$

Esta es una función armónica amortiguada debido a que está multiplicada por una exponencial con exponente negativo. A medida que aumenta el tiempo, el período no cambia, pero su amplitud va disminuyendo hasta ser cero cuando $t \rightarrow \infty$.



Para este trazado conviene seguir los siguientes pasos:

- 1) Se traza la senoide con amplitud $A = 1$ y se ubican los ejes como se indica en el punto precedente.
- 2) Se traza la exponencial, también con módulo 1.
- 3) Se traza una exponencial igual a la anterior multiplicada por -1.
- 4) Hacemos el producto del seno por la exponencial, ubicando puntos singulares, para lo cual tenemos en cuenta que:
 - a. los ceros del seno son ceros del producto
 - b. Cuando el seno vale 1, el producto es el valor de la exponencial
 - c. Cuando el seno vale -1, el producto tiene el valor de la exponencial negativa

- d. El valor en el origen, cuando la exponencial vale 1, es el valor del seno.
 - e. Como los valores absolutos del seno y los valores de la exponencial son menores o iguales a la unidad, el producto es menor o a lo sumo igual al menor de ellos. Esto le confiere una característica particular a la gráfica de dicho producto: resulta una onda senoidal cuya amplitud va mermando inscripta entre la exponencial y su imagen especular
- 5) Finalmente, si $A \neq 1$ se cambia la escala del eje de ordenadas, multiplicando por el valor de A . (Donde decía 1 ponemos A).